A RAZINA LJETNI ROK 2023. RJEŠENJA

univ.bacc.math Robert Tadić

Zadatak 1

Čemu je jednako $x^4 \cdot \sqrt[3]{x^2}$?

(a) $x^{\frac{5}{2}}$

(b) $x^{\frac{8}{3}}$

(c) $x^{\frac{14}{3}}$

(d) $x^{\frac{11}{2}}$

Rješenje:

Prvo zapišmo $\sqrt[3]{x^2}$ u obliku potencije s bazom x. Općenito je $\sqrt[a]{x^b} = x^{\frac{b}{a}}$.
Stoga je:
$\sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$. Sada, koristeći pravilo za množenje potencija s istom bazom imamo:

$$x^4 \cdot \sqrt[3]{x^2} = x^4 \cdot x^{\frac{2}{3}} = x^{4+\frac{2}{3}} = x^{\frac{14}{3}}.$$

Zadatak 2

Koji se od navedenih razlomaka može skratiti za sve cijele brojeve x i y za koje je definiran?

(a) $\dfrac{3x+8y}{4xy}$

(b) $\dfrac{10xy}{2x-5y}$

(c) $\dfrac{3x-4y}{6x+8y}$

(d) $\dfrac{4y+xy}{xy-2y}$

Rješenje:

Da bismo mogli skratiti razlomke moramo i brojnik i nazivnik napisati u obliku umnoška. Prva tri izraza ne možemo pokratiti, a izlučivanjem y i u brojniku i u nazivniku četvrtog izraza imamo:

$$\frac{4y+xy}{xy-2y} = \frac{y(4+x)}{y(x-2)} = \frac{4+x}{x-2},$$

pa je točan odgovor pod d).

Zadatak 3

Početna cijena nekog proizvoda poveća se za 50%, a zatim se dobivena umanji za 50%. Koja od navedenih tvrdnja vrijedi za konačnu cijenu toga proizvoda?

(a) Jednaka je 50% početne cijene.

(b) Jednaka je 75% početne cijene.

(c) Jednaka je 100% početne cijene.

(d) Jednaka je 125% početne cijene.

Rješenje:

Označimo početnu cijenu proizvoda nepoznanicom x. Nakon povećanja od 50% nova cijena je $x + \frac{50}{100}x = 1.5x$. Sada novu cijenu snizimo za 50%, pa je trenutna cijena proizvoda jednaka $1.5x - \frac{50}{100} \cdot 1.5x = 0.75x$. Dakle, konačna cijena je 75% početne cijene.

Zadatak 4

U nekome je razredu 13 učenika rodenih 2004. godine i 11 učenika rodenih 2005. godine. Kolika je vjerojatnost da je slučajnim odabirom odabran učenik roden 2004. godine?

(a) $\frac{1}{13}$

(b) $\frac{1}{12}$

(c) $\frac{13}{24}$

(d) $\frac{11}{13}$

Rješenje:

Vjerojatnost računamo kao $\frac{\text{Broj povoljnih dogadaja}}{\text{Broj ukupnih dogadaja}}$.

Broj ukupnih dogadaja jest 24, a broj povoljnih, odnosno onih rodenih 2004. godine jednak je 13. Stoga je tražena vjerojatnost $\frac{13}{24}$.

Zadatak 5

Čemu je jednako jedno rješenje kvadratne jednadžbe $x^2 - x - c = 0$?

(a) $\frac{-1 + \sqrt{1-4c}}{2}$

(b) $\frac{-1 + \sqrt{1+4c}}{2}$

(c) $\frac{1 + \sqrt{1-4c}}{2}$

(d) $\frac{1 + \sqrt{1+4c}}{2}$

Rješenje:

Koristimo formulu za rješenja kvadratne jednadžbe:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

U navedenoj kvadratnoj jednadžbi je $a = 1$, $b = -1$, pa su rješenja:

$$x_{1,2} \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-c)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4c}}{2}$$

Jedino od ponudenih rješenja pod d).

Zadatak 6

Koja od navedenih tvrdnja vrijedi za rješenja svih kvadratnih jednadžba kojima je diskriminanta jednaka 19?

(a) Rješenja su realni brojevi

(b) Rješenja nisu realni brojevi

(c) Umnožak rješenja iznosi 19

(d) Zbroj rješenja iznosi 10

Rješenje:

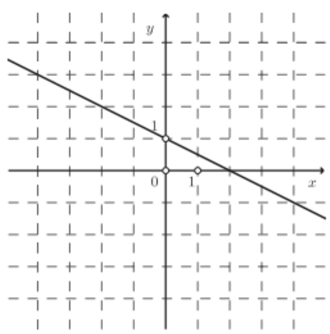
Diskriminanta $D = b^2 - 4ac$ kvadratne jednadžbe govori sljedeće o rješenjima

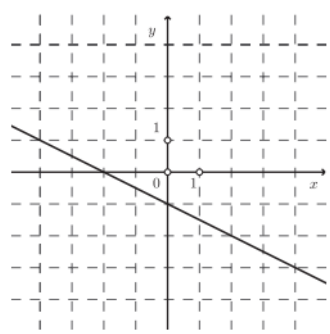
- Ako je $D \geq 0$ onda jednadžba ima dva različita realna rješenja
- Ako je $D = 0$ onda jednadžba ima jedno realno rješenje
- Ako je $d \leq 0$ onda jednadžba nema realnih rješenja

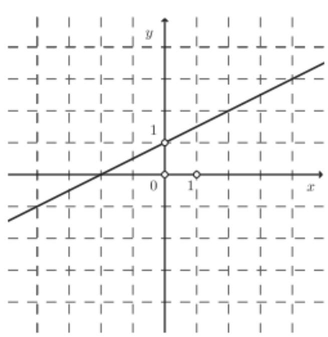
Dakle, ako je diskriminanta 19 onda jednadžba ima dva realna rješenja, tj. rješenja su realni brojevi.

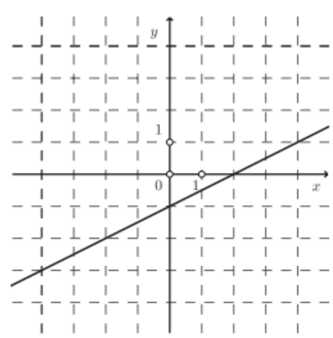
Zadatak 7

Na kojoj je slici prikazan graf funkcije $f(x) = -0.5x + 1$?


A.


B.


C.


D.

Rješenje:

Koeficijent uz x je negativan, pa je funkcija padajuća. Slobodni član iznosi 1, pa pravac siječe os y u točki (0,1). Dakle, a) odgovara grafu zadane funkcije.

Zadatak 8

U trenutku uključivanja klimatizacijskoga uređaja temperatura zraka u prostoriji iznosila je 28°C, a pet minuta nakon uključivanja iznosila je 26°. Kojom je od navedenih funkcija opisana ovisnost temperature T o vremenu t u minutama koje je proteklo od uključivanja klimatizacijskoga uređaja ako se temperatura smanjuje jednoliko?

(a) $T(t) = -\frac{5}{2}t + 26$

(b) $T(t) = -\frac{5}{2}t + 28$

(c) $T(t) = -\frac{2}{5}t + 26$

(d) $T(t) = -\frac{2}{5}t + 28$

Rješenje:

U trenutku $t = 0$ temperatura zraka u prostoriji iznosila je 28°C. Stoga mora vrijediti $T(0) = 28$, pa možemo eliminirati odgovore a) i c). Nadalje, analogno vrijedi $T(5) = 26$, pa je točan odgovor pod d).

Zadatak 9

Koji je od navedenih pravaca paralelan pravcu $9x + 3y = 5$?

(a) $y = -3x$

(b) $y = -\frac{1}{3}x$

(c) $y = \frac{1}{3}x$

(d) $y = 3x$

Rješenje:

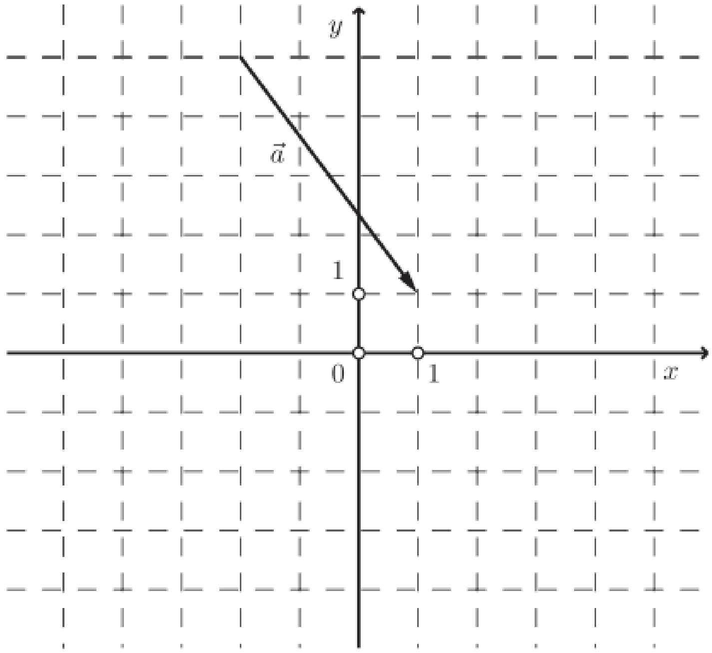
Pravci su paralelni ako su im koeficijenti smjera jednaki. Napišimo jednadžbu pravca u eksplicitnom obliku:

$$\begin{aligned} 9x + 3y &= 5 \\ 3y &= -9x + 5 \\ y &= -3x + \frac{5}{3} \end{aligned}$$

Koeficijent smjera ovog pravca je -3, pa će koeficijent smjera pravca koji je paralelan s njim takoder biti -3. Dakle, točan odgovor je pod a).

Zadatak 10

Vektor $\overrightarrow{a}$ prikazan je na slici.



Što je od navedenoga zapis vektora $\overrightarrow{a}$?

(a) $\overrightarrow{a} = -4\overrightarrow{i} - 3\overrightarrow{j}$

(b) $\overrightarrow{a} = 4\overrightarrow{i} - 3\overrightarrow{j}$

(c) $\overrightarrow{a} = -3\overrightarrow{i} + -4\overrightarrow{j}$

(d) $\overrightarrow{a} = 3\overrightarrow{i} - 4\overrightarrow{j}$

Rješenje:

Koordinatne početne točke vektora $\overrightarrow{a}$ su (-2,5), a krajnje (1,1). Stoga vektor $\overrightarrow{a}$ možemo zapisati kao:

$$\overrightarrow{a} = (1-(-2))\overrightarrow{i} + (1-5)\overrightarrow{j} = 3\overrightarrow{i} - 4\overrightarrow{j}$$

Zadatak 11

Koja je točka središte kružnice zadane jednadžbom $x^2 + y^2 + 4y = 0$?

(a) (0,-4)

(b) (0,-2)

(c) (0,2)

(d) (0,4)

Rješenje:

Jednadžba kružnice sa središtem u (x_1, y_1) radijusa r glasi:

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = r^2$$

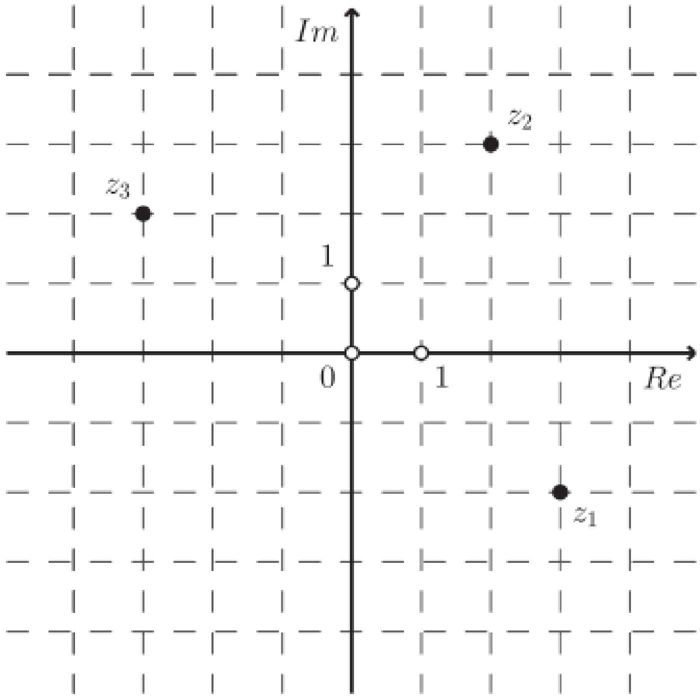
Stoga svedimo zadanu jednadžbu na traženi oblik. Imamo:

$$\begin{gathered}
x^2 + y^2 + 4y = 0 \\
x^2 + y^2 + 4y + 4 - 4 = 0 \\
x^2 + y^2 + 4y + 4 = 4 \\
x^2 + (y + 2)^2 = 4 \\
(x - 0)^2 + (y - (-2))^2 = 2^2
\end{gathered}$$

Dakle, središte zadane kružnice je točka (0,-2).

Zadatak 12

U kompleksnoj su ravnini prikazane točke pridružene brojevima z_1 z_2 i z_3.



Koja je tvrdnja točna za navedene brojeve?

(a) $z_1 = -z_2$

(b) $z_1 = -z_3$

(c) $z_1 = \overline{z_2}$

(d) $z_1 = \overline{z_3}$

Rješenje:

Geometrijski, ako su kompleksni brojevi suprotni, onda su u ravnini simetrični obzirom na ishodište. Ako se jedan dobije konjugacijom drugog, onda su simetrični obzirom na os y. Budući da su z_3 i z_1 simetrični obzirom na ishodište, točan odgovor je b).

Zadatak 13

Koja je od navedenih tvrdnja točna za svaki trokut?

(a) Težište dijeli težišnicu u omjeru 2:1

(b) Visina trokuta spaja vrh i polovište nasuprotne stranice trokuta.

(c) Simetrala kuta trokuta okomita je na stranicu nasuprotnu tomu kutu

(d) Simetrale stranica trokuta sijeku se u ortocentru.

Rješenje:

Tvrdnja pod a) važno je svojstvo težišta i ona je točna.
Tvrdnje b) i c) ne vrijede općenito, već samo za jednakokračne trokute, a ortocentar je sjecište visina trokuta.

Zadatak 14

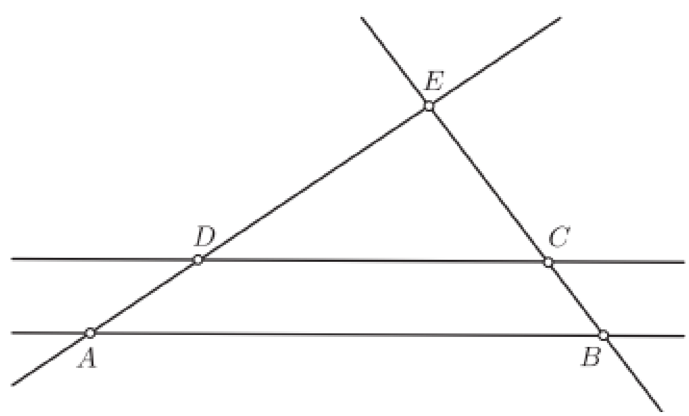
Pravci AB i CD prikazani na skici su paralelni. Ako je$|BC| : |CE| = 3 : 5$ i $|AB| = 24$ cm, kolika je duljina dužine $|CD|$?

(a) 9

(b) 9.6

(c) 14.4

(d) 15



Rješenje:

Trokuti $\triangle ABE$ i $\triangle CDE$ su slični. Budući da je $|BC| : |CE| = 3 : 5$, to je $|BE| : |CE| = 8 : 5$, pa je:

$$|BE| : |CE| = 8 : 5 = |AB| : |CD|$$

$$\frac{8}{5} = \frac{24}{|CD|}$$

$$3|CD| = 24 \cdot 5 \Rightarrow |CD| = 15$$

Zadatak 15

Koja od navedenih tvrdnji **nije** točna?

(a) Obodni je kut nad promjerom pravi.

(b) Obodni je kut dvostruko manji od pripadnoga središnjeg kuta.

(c) Ako se opseg kruga poveća dva puta, dva mu se puta poveća i površina.

(d) Ako se polumjer kruga poveća dva puta, dva mu se puta poveća i opseg.

Rješenje:

Prve dvije tvrdnje su oznate činjenice o trokutima. Promotrimo treću tvrdnju. Opseg kruga radijusa $2r$ jednak je $2r\pi$. Ako se opseg kruga poveća dva puta, njegov je opseg $4r\pi$, odnosno radijus mu se povećao 2 puta. Površina trokuta radijusa $2r$ jednaka je $(2r)^2\pi = 4r^2\pi$, a površina trokuta radijusa r jednaka je $r^2\pi$. Dakle, ako se opseg kruga poveća dva puta, površina se poveća 4 puta, pa tvrdnja c) nije točna.

Zadatak 16

Duljine kateta pravokutnoga trokuta su 5 cm i 12 cm. Koliko iznosi tangens kuta nasuprot kraćoj kateti?

(a) $\frac{5}{13}$

(b) $\frac{5}{12}$

(c) $\frac{12}{13}$

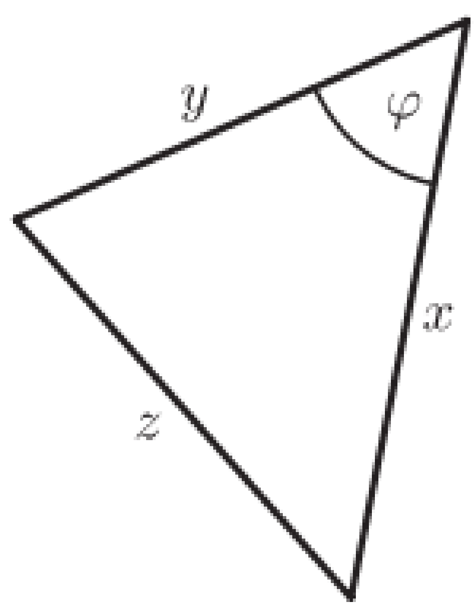
(d) $\frac{12}{5}$

Rješenje:

U pravokutnome trokutu tangens kuta jednak je omjeru nasuprotne katete i priležeće katete. Nasuprot kraće katete je manji kut, pa je tangens traženog kuta $\frac{5}{12}$.

Zadatak 17

Što od navedenoga vrijedi za duljine stranica x, y i z te kut φ trokuta prikazanoga na skici?



(a) $\cos\varphi = \dfrac{x^2+y^2-z^2}{2xy}$

(b) $\cos\varphi = \dfrac{x^2+y^2-z^2}{2yz}$

(c) $\cos\varphi = \dfrac{x^2+z^2-y^2}{2xy}$

(d) $\cos\varphi = \dfrac{y^2+z^2-x^2}{2yz}$

Rješenje:

Prema poučku o kosinusu vrijedi:

$$z^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos\varphi$$

$$2xy\cos\varphi = x^2 + y^2 - z^2$$

$$\cos\varphi = \frac{x^2+y^2-z^2}{2xy}$$

Zadatak 18

U kojemu se kvadrantu koordinatnoga sustava nalazi točka E(t) brojevne kružnice pridružena broju t tako da vrijedi $cost = 0.15$ i $tgt < 0$?

(a) u prvome

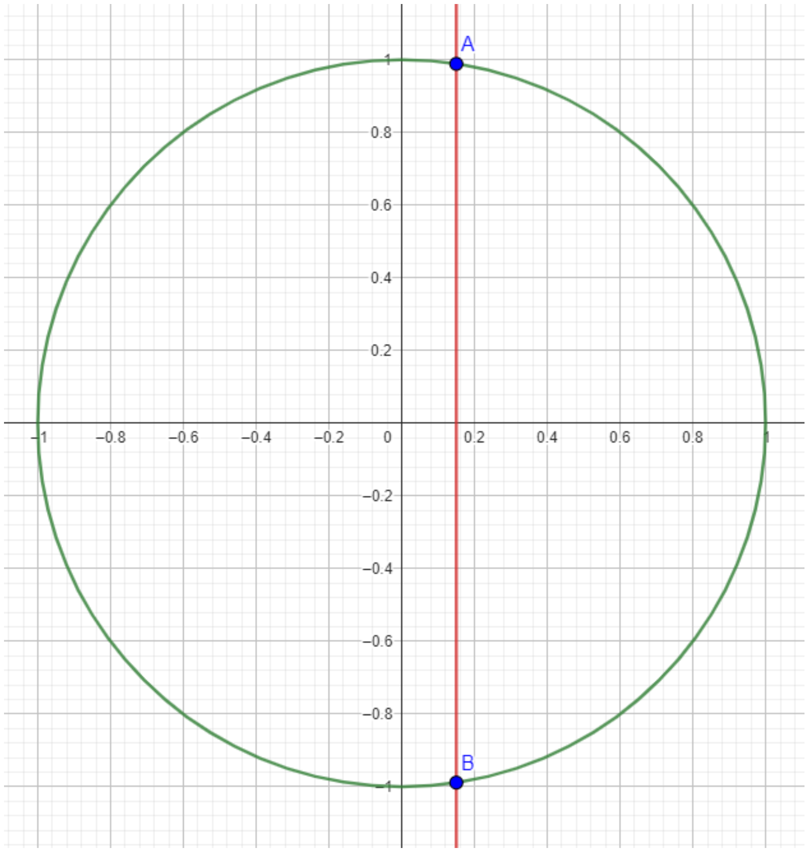
(b) u drugome

(c) u trećemu

(d) u četvrtome

Rješenje:

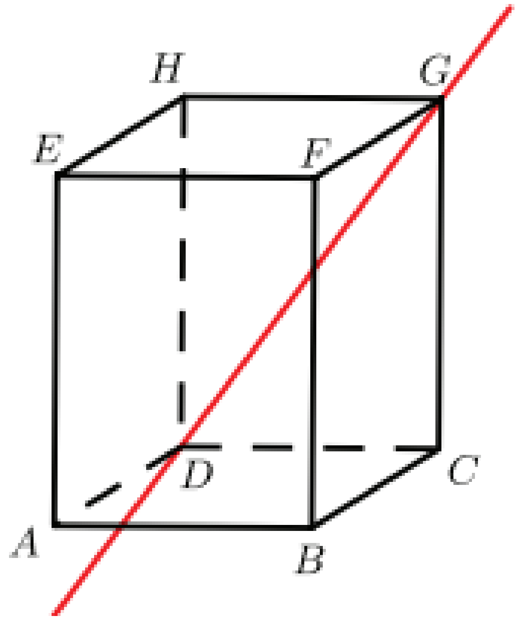
Na jediničnoj kružnici označene su točke A i B kojima je kosinus jednak 0.15. Budući da mora vrijediti $tgt < 0$, slijedi da je B tražena točka i ona se nalazi u četvrtom kvadrantu.



A
B

Zadatak 19

Na skici je prikazan kvadar ABCDEFGH i pravac DG.



S kojom je od navedenih ravnina pravac DG usporedan?

(a) ADH

(b) ABF

(c) BCF

(d) EFH

Rješenje:

Pravac i ravnina su usporedni ako se ne sijeku. Jedina ravnina koju zadani pravac ne siječe je ravnina određena točkama A,B i F.

Zadatak 20

Koliko iznosi volumen tijela koje nastaje rotacijom pravokutnika sa stranicama duljina 7 cm i 8 cm oko kraće stranice?

(a) $196\pi cm^3$

(b) $224\pi cm^3$

(c) $392\pi cm^3$

(d) $448\pi cm^3$

Rješenje:

Rotacijom pravokutnika oko jedne stranice nastaje valjak. Radijus baze tog valjka je druga stranica, a visina mu je jednaka stranici oko koje rotira.
Volumen valjka jednak je $V = B \cdot v$, pri čemu je B površina baze, a v visina valjka. Dakle, volumen valjka koji nastaje rotacijom zadanog pravokutnika jednak je: $V = B \cdot v = r^2\pi \cdot v = 8^2\pi cm^2 \cdot 7cm = 448\pi cm^3$

Zadatak 21

Koliko iznosi peti član geometrijskoga niza kojemu je prvi član 2, a četvrti -54?

(a) -486

(b) -162

(c) 162

(d) 486

Rješenje:

Koristimo formulu za opći član geometrijskog niza: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$.
Iskoristimo informacije o prvom i četvrtom članu, pa možemo izračunati koeficijent q. Vrijedi:

$$-54 = 2 \cdot q^{4-1}$$
$$-54 = 2 \cdot q^3$$
$$q^3 = -27 \Rightarrow q = -3$$

Sada možemo izračunati peti član preko iste formule:

$$a_5 = a_1 \cdot q^{5-1}$$
$$a_5 = 2 \cdot (-3)^4 = 162$$

Zadatak 22

Čemu je jednaka derivacija funkcije $f(x) = -x^{-5}$?

(a) $f(x) = -5x^{-6}$

(b) $f(x) = -5x^{-4}$

(c) $f(x) = 5x^{-6}$

(d) $f(x) = 5x^{-4}$

Rješenje:

Derivacija funkcije $f(x)$ jednaka je:

$$f'(x) = -(-5)x^{-5-1} = 5x^{-6}$$

Zadatak 23

Koliko iznosi nagib tangente na graf funkcije $f(x) = 5\sqrt{x} + 1$ u točki s apscisom $x = 9$?

(a) $\frac{5}{6}$

(b) $\frac{11}{6}$

(c) $\frac{15}{2}$

(d) $\frac{17}{2}$

Rješenje:

Nagib tangente na graf u zadanoj točki, jednak je vrijednosti derivacije u toj točki. Dakle, moramo derivirati funkciju i u nju uvrstiti $x = 9$. Zapišimo funkciju u obliku

$$f(x) = 5x^{\frac{1}{2}} + 1$$

Sada je njena derivacija jednaka

$$f'(x) = 5 \cdot \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} + 0 = 5 \cdot \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}.$$

Stoga je

$$f'(9) = 5 \cdot \frac{1}{2}9^{-\frac{1}{2}} = \frac{5}{6}$$

Zadatak 24

Koji je od navedenih intervala slika funkcije $f(x) = |x - 5| + 7$?

(a) $\langle -\infty, -7]$

(b) $\langle -7, -5\rangle$

(c) $\langle 5, 7\rangle$

(d) $[7, +\infty\rangle$

Rješenje:

Slika funkcije modul je $[0, +\infty\rangle$. Stoga je slika zadane funkcije $[7, +\infty\rangle$.

Zadatak 25

Racionalizirajte nazivnik razlomka $\frac{1}{\sqrt[3]{5}}$.

Rješenje:

Racionalizirati nazivnik znači svesti razlomak na oblik u kojem je nazivnik racionalan broj. Stoga proširimo razlomak s $\sqrt[3]{5}^2$, pa imamo

$$\frac{1}{\sqrt[3]{5}} = \frac{\sqrt[3]{5}^2}{\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{5}^2} = \frac{\sqrt[3]{5}^2}{5} = \frac{\sqrt[3]{25}}{25}$$

Zadatak 26

Riješite nejednadžbu $3 - (2x - 5) < 4$ i rješenje zapišite uz pomoć intervala.

Rješenje:

$$\begin{gathered} 3 - (2x - 5) < 4 \\ 3 - 2x + 5 < 4 \\ 8 - 2x < 4 \\ -2x < -4 : (-2) \\ x > 2 \end{gathered}$$

Skup rješenja zadane nejednadžbe je $\langle 2, +\infty\rangle$.

Zadatak 27

Izraz $x^2+y^2-2xy-1$ zapišite u obliku umnoška dvaju linearnih faktora.

Rješenje:

Koristeći formule za kvadrat razlike i razliku kvadrata, imamo:

$x^2+y^2-2xy-1 = x^2-2xy+y^2-1 = (x-y)^2-1^2 = (x-y-1)\cdot(x-y+1)$

Zadatak 28

Napišite trigonometrijski zapis nekoga kompleksnog broja kojemu je pridružena točka na imaginarnoj osi u kompleksnoj (Gaussovoj) ravnini.

Rješenje:

Geometrijska interpretacija trigonometrijskog oblika kompleksnog broja $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ je sljedeća:

- r predstavlja udaljenost od ishodišta
- φ predtsavlja kut koji zatvara pravac koji prolazi kroz ishodište i točkom u Gaussovoj ravnini s pozitivnim dijelom x osi

Imaginarna os je y os. Stoga, odaberemo li primjerice točku (0,2), kut koji zatvara pravac koji prolazi točkama (0,0) i (0,2) je $90°$, a $r = 2$, pa je trigonometrijski oblik tog kompleksnog broja jednak
$2(cos90° + isin90°)$

Zadatak 29

Riješite zadatke:

Zadatak 29.1

Za koliko je broj $4 \cdot 10^{110}$ veći od broja $3 \cdot 10^{108}$?

Rješenje:

Potrebno je oduzeti dva navedena broja. Ukoliko kalkulator ne može izračunati razliku, onda radimo sljedeće:

$$4 \cdot 10^{110} - 3 \cdot 10^{108} = 4 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10^{108} - 3 \cdot 10^{108} =$$
$$400 \cdot 10^{108} - 3 \cdot 10^{108} = 397 \cdot 10^{108}$$

Znanstveni zapis tog broja je $3.97 \cdot 10^{110}$

Zadatak 29.2

Poredajte od najmanjega do najvećega brojeve $a^{-1}, a^{-2}, a^{-3}, a^{-4}$ za svaki $a < -1$.

Rješenje:

Dovoljno je provjeriti rješenja za proizvoljni $a < -1$. Stavimo $a = -2$, pa je $a^{-1} = -\frac{1}{2}, a^{-2} = \frac{1}{3}, a^{-3} = -\frac{1}{8}, a^{-4} = \frac{1}{16}$. Dakle, traženi poredak je $a^{-1}, a^{-3}, a^{-4}, a^{-2}$.

Zadatak 30

Riješite zadatke.

Zadatak 30.1

Riješite jednadžbu $2 - \dfrac{7m+1}{5} = m$.

Rješenje:

Pomnožimo jednadžbu s 5. Tada imamo

$$\begin{aligned} 10 - (7m+1) &= 5m \\ 10 - 7m - 1 &= 5m \\ -7m - 5m &= -9 \\ -12m &= -9 \\ m &= \frac{9}{12} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Zadatak 30.2

Marko u jednoj minuti pretrči 200 metara, a Luka u jednoj minuti biciklom prijede 500 metara. Ako je svaki od njih prešao put od šest kilometara, koliko je minuta više Marko trčao nego što je Luka vozio bicikl?

Rješenje:

Marko u jednoj minuti pretrči 200 metara. Ako je prešao put od 6 kilometara, odnosno 6000 metara, trčao je $\frac{6000}{200} = 30$ minuta. Slično, Luka je vozio bicikl $\frac{6000}{500} = 12$ minuta. Dakle, Marko je trčao 18 minuta više nego što je Luka vozio bicikl.

Zadatak 31.1

U tablici su navedeni podatci o visini djece u nekoj vrtićkoj skupini:

BROJ DJECE	VISINA (cm)
3	110
4	112
2	116
1	120
3	121
1	124

Zadatak 31.1

Koliko iznosi mod prikazanih podataka?

Rješenje:

Mod je vrijednost koja se najčešće pojavljuje u skupu podataka. U ovom slučaju to je 112.

Zadatak 31.2

Koliko iznosi medijan skupa podataka o visini djece u toj skupini ako je naknadno upisano i dijete visine 123 cm?

Rješenje:

Nakon što je upisano dijete visine 123 cm, ukupan broj podataka je 15. Medijan je pozicijska srednja vrijednost, u smislu da je pola podataka manjih od njega i pola većih od njega. U ovom slučaju to je osmi podatak, odnosno 116.

Zadatak 32

Pravac je zadan jednadžbom $y = 4x - 8$.

Zadatak 32.1

Koliko iznosi udaljenost točke s koordinatama (2,-1) do zadanog pravca?

Rješenje:

Koristimo formulu za udaljenost točke $\mathrm{T}(x_1, y_1) = (2, -1)$ i $Ax + By + C = 0$. Pravac moramo svesti na traženi oblik, pa imamo $4x - y - 8 = 0$. Tada je $A = 4, B = -1, C = -8$. Formula za udaljenost točke od pravca je:

$$\frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|4 \cdot 2 + (-1) \cdot (-1) - 8|}{\sqrt{4^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{17}} = \frac{\sqrt{17}}{17}$$

Zadatak 32.2

Koliko iznosi površina trokuta koji zadani pravac odreduje s koordinatnim osima?

Rješenje:

Odredimo sjecišta pravca s koordinatnim osima. Za presjek s y-osi stavimo $x = 0$, pa je $y = 4 \cdot 0 - 8 = -8$, a za presjek s x osi stavimo $y = 0$, pa imamo $0 = 4x - 8 \Rightarrow x = 2$. Trokut koji zadani pravac je pravokutan s duljinama kateta 8 i 2, pa je njegova površina $P = \dfrac{8 \cdot 2}{2} = 8$

Zadatak 33

Duljina vektora $\overrightarrow{a}$ je 5, duljina vektora $\overrightarrow{b}$ je 10 i vrijedi $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 25$.

Zadatak 33.1

Koliko iznosi mjera kuta odredenoga vektorima $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$?

Rješenje:

Prema definiciji skalarnog produkta je $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}| \cdot \cos \angle \left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right)$.
Slijedi:
$25 = 5 \cdot 10 \cdot \cos \angle \left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right)$
$\cos \angle \left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right) = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \angle \left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right) = \cos^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right) = 60°.$

Zadatak 33.2

Koliko iznosi $|\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}|$?

Rješenje

Imamo:

$$|\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}|^2 = |\overrightarrow{a}|^2 - 2\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} + |\overrightarrow{b}|^2$$

$$|\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}|^2 = 5^2 - 2 \cdot 25 + 10^2 = 75$$

$$|\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}| = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$$

Zadatak 34

Zadana je kvadratna funkcija $f(x) = 3x^2 + 12x - 15$.

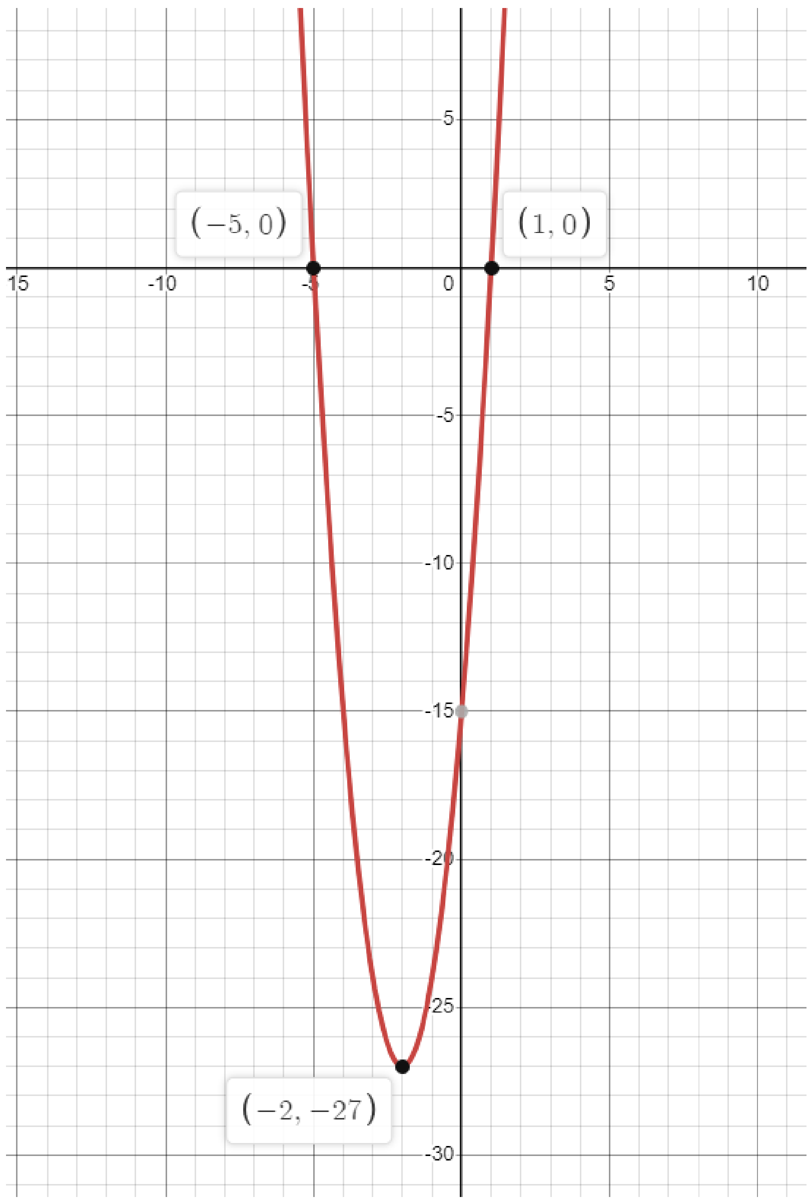
Zadatak 34.1

Napišite jednadžbu osi simetrije grafa funkcije f.

Rješenje:

Nacrtajmo graf funkcije f. Moramo odrediti nultočke i koordinate tjemena. Nultočke su rješenja kvadratne jednadžbe $3x^2 + 12x - 15 = 0$, a to su -5 i 1.

Nadalje, koordinate tjemena dane su sa $\left(\frac{-b}{2a}, \frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$, pa su koordinate tjemena ove funkcije $\left(\frac{-12}{2 \cdot 3}, \frac{12^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-15)}{4 \cdot 3}\right) = (-2, -27)$. Dakle, graf funkcije izgleda kao na slici:



Os simetrije je pravac paralelan s osi y koji prolazi tjemenom. Njegova jednadžba je $x = -2$.

Zadatak 34.2

Odredite sve realne brojeve x za koje funkcija f poprima negativne vrijednosti.

Rješenje:

Sa grafa vidimo da funkcija poprima negativne vrijednosti na intervalu $\langle -5, 1 \rangle$.

Zadatak 35

Riješite zadatke.

Zadatak 35.1

Izraz $1 - 2log_a 3$ zapišite kao jedan logaritam za svaki a koji je definiran.

Rješenje:

Prema pravilima za logaritme vrijedi $1 - 2log_a 3 = log_a a - log_a 3^2 = log_a a - log_a 9 = log_a \frac{a}{9}$.

Zadatak 35.2

Funkcijom $B(d) = 50 \cdot 1.05^d$ procjenjuje se broj posjeta novoj mrežnoj stranici neke trgovine d dana nakon objave te stranice. Koji će dan od objave prema toj procjeni mrežna stranica prvi put imati 1135 posjeta?

Rješenje:

Rješavamo jednadžnu

$$1135 = 50 \cdot 1.05$$
$$1.05^d = 22.7$$
$$d = log_{1.05} 22.7 \approx 64$$

Zadatak 36

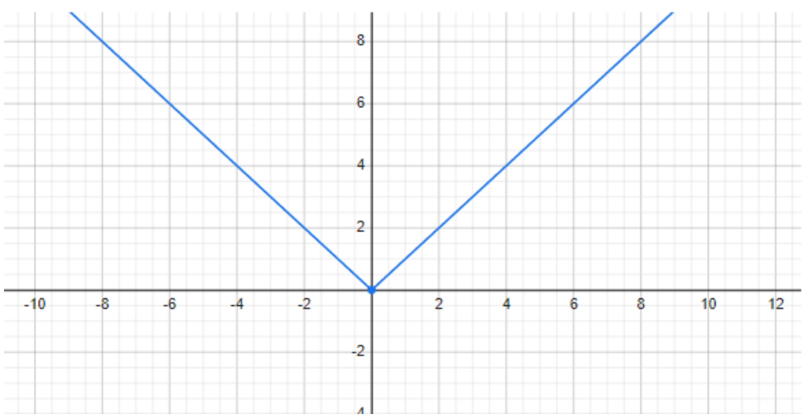
Riješite zadatke

Zadatak 36.1

Nacrtajte graf neke parne funkcije.

Rješenje:

Grafovi parnih funkcija simetrični su obzirom na y os. Stoga je dovoljno nacrtati bilo koju funkciju simetričnu obzirom na os y, primjerice:



Zadatak 36.2

Odredite domenu funkcije $f(x) = log(x-6)^4$.

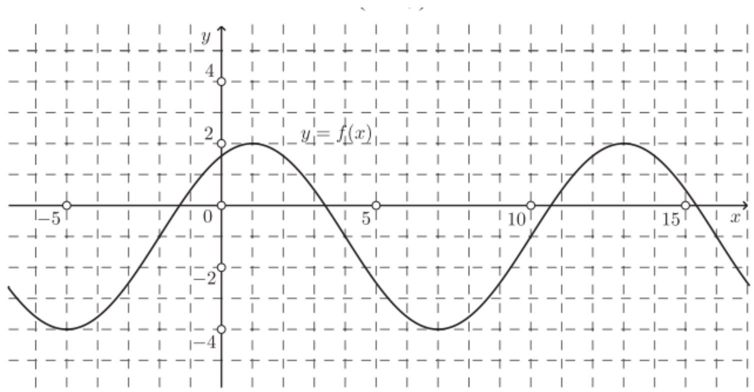
Rješenje:

Jedini uvjet na domenu jest da je izraz unutar logaritma veći od 0.

Međutim, budući da je potencija u izrazu $(x-6)^4$ parna, izraz koji logaritmiramo mora biti različit od 0, odnosno $x \neq 6$. Daklem domena funkcije je $\mathbb{R} \setminus \{6\}$.

Zadatak 37

Na slici je prikazan graf funkcije $f(x) = A \sin\left(Bx + \frac{\pi}{3}\right) + D$.



Zadatak 37.1

Odredite vrijednost koeficijenta B.

Rješenje:

Na slici vidimo da je period funkcije jednak 12. Općenito, period funkcije $f(x) = Asin\,(Bx + C) + D$ jednak je $\frac{2\pi}{B}$. Dakle, vrijedi:

$$\frac{2\pi}{B} = 12 \Rightarrow B = \frac{\pi}{6}$$

Zadatak 37.2

Odredite vrijednost koeficijenta D.

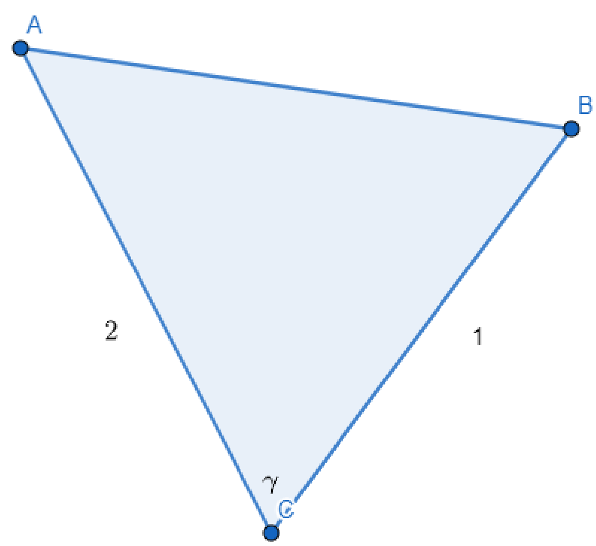
Rješenje:

U funkcijama oblika $f(x) = Asin\,(Bx + C) + D$, koeficijent D translatira funkciju prema gore ako je pozitivan, odnosno prema dolje ako je negativan. Stoga lako vidimo da je $D = -1$.

Zadatak 38.1

Duljine dviju stranica trokuta su 1 cm i 2 cm, a površina mu je $\frac{12}{13}cm^2$. Koliko iznosi duljiina treće stranice toga trokuta?

Rješenje:



Pomoću formule za površinu trokuta $P = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$ možemo izračunati kut nasuprot treće stranice. Vrijedi:

$$\frac{12}{13} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2\sin\gamma$$

$$\sin\gamma = \frac{12}{13}$$

$$\gamma_1 = 67.38^\circ,\ \gamma_2 = 112.62^\circ$$

Sada preko poučka o kosinusu možemo izračunati duljinu treće stranice. Za γ_1 vrijedi:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma_1$$

$$c^2 = 1^2 + 2^2 - 2\cdot 1\cdot 2\cdot \cos 67.38^\circ$$

$$c^2 = 3.461529758 \Rightarrow c = 1.86$$

Slično, za γ_2 vrijedi:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma_1$$

$$c^2 = 1^2 + 2^2 - 2\cdot 1\cdot 2\cdot \cos 112.62^\circ$$

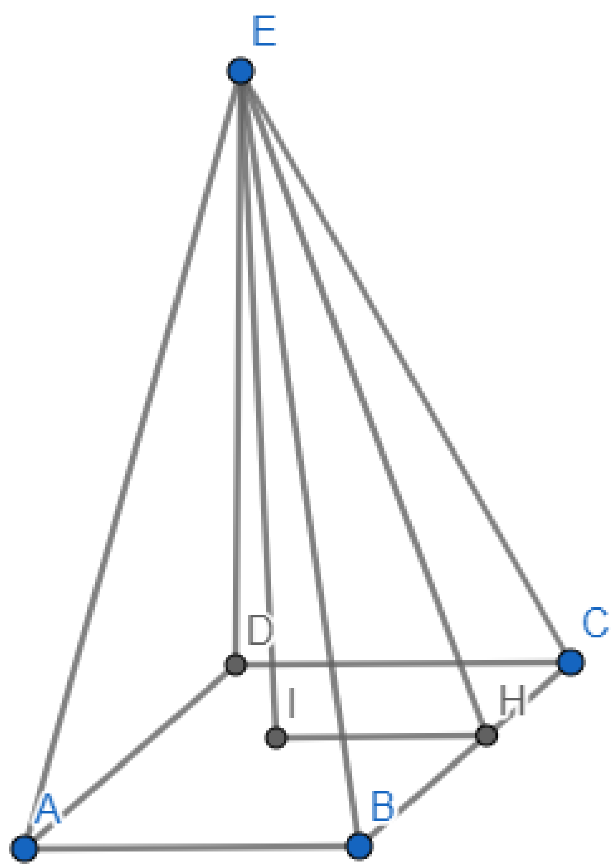
$$c^2 = 6.53847 \Rightarrow c = 2.56$$

Napomena: Za ostvariti sve bodove na ovom zadatku bilo je dovoljno odrediti jedno rješenje.

Zadatak 38.2

Koliko iznosi površina pobočja pravilne četverostrane piramide kojoj je osnovni brid duljine 12.6 cm, a kut izmedu ravnine osnovke (baze) i ravnine pobočke mjere $48°31'$?

Rješenje:



Pobočje pravilne četverostrane piramide sastoji se od četiri jednaka trokuta. Odrediti ćemo površinu trokuta $\triangle BCE$ sa slike. Točka I je odabrana u ravnini osnovke tako da je $\overline{EI}$ visina piramide, a točka H takva da je $\overline{EH}$ visina trokuta. Površina trokuta jednaka je polovini umnoška duljine stranice i duljine visine. Duljina stranice $\overline{BC}$ je zadana i iznosi 12.6 cm, pa ćemo odrediti duljinu visine. Kut $\angle IHE$ iznosi $48°31'$, a duljina dužine $\overline{IH}$ jednaka je polovini duljine dužine $\overline{AB}$, odnosno $|\overline{IH}| = 6.3$cm. Trokut $\triangle EIH$ je pravokutan, pa iz trigonometrijskih formula u pravokutnom trokutu imamo:

$$\cos(\angle EHI) = \frac{|\overline{HI}|}{|\overline{EH}|}$$
$$\cos(48°31') = \frac{6.3}{|\overline{EH}|}$$
$$|\overline{EH}| = \frac{6.3}{cos(38°31')} = 9.51 \text{ cm.}$$

Dakle, površina pobočja jednaka je $4 \cdot \dfrac{12.6 \cdot 9.51}{2} = 239.652cm^2$

Zadatak 39.1

Ako funkcija $f(x) = \dfrac{4x - a}{x^2 + 1}$ za $x = 2$ postiže lokalni maksimum, odredite za koji x ta funkcija postiže lokalni minimum.

Rješenje:

Funkcija postiže lokalne ekstreme u točkama u kojima je derivacija jednaka 0. Stoga derivirajmo funkciju i riješimo jednadžbu $f'(x) = 0$. Imamo:

$$f'(x) = \frac{(4x - a)' \cdot (x^2 + 1) - (4x - a) \cdot (x^2 + 1)'}{(x^2 + 1)^2} =$$

$$= \frac{4(x^2 + 1) - (4x - a)(2x)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{4x^2 + 4 - +8x^2 - 2ax}{(x^2 + 1)^2} =$$
$$\frac{-4x^2 + 2ax + 4}{(x^2 + 1)^2}$$

Izjednačavanjem derivacije s nulom imamo:

$$\frac{-4x^2 + 2ax + 4}{(x^2 + 1)^2} = 0, \text{ odnosno}$$
$$-4x^2 + 2ax + 4 = 0$$

Znamo da je jedno rješenje te jednadžbe $x = 2$, pa mora vrijediti

$$-4 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2a + 1 = 0$$

$$-16 + 4a + 4 = 0 \Rightarrow a = 3.$$

Stoga je jednadžba oblika $-4x^2 + 6x + 4 = 0$, a rješenja te kvadratne jednadžbe su $x_1 = 2$ i $x_2 = -\frac{1}{2}$. Dakle, funkcija poprima minimum u točki $x = -\frac{1}{2}$.

Zadatak 39.2

Banka je izradila set novih kovanica različite veličine tako da svaka sljedeća kovanica ima za 1.5 mm veći promjer od prethodne. Koliko je kovanica u setu ako je promjer najveće kovanice za 60% veći od promjera najmanje kovanice, a prosječan je promjer svih kovanica 26 mm?

Rješenje:

Označimo duljine promjera prve kovanice sa a_1 i duljine promjera $n-te$ kovanica sa a_n. Tada su duljine promjera redom $a_1, a_1 + 1.5, a_1 + 1.5 + 1.5, \ldots.$ Vidimo da one tvore aritmetički niz s prvim članom a_1 i razlikom $d = 1.5$. Nadalje, n-ti član aritmetičkog niza dan je relacijom $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$, u ovom slučaju $a_n = a_1 + (n-1) \cdot 1.5$. Promjer kovanice a_n je 1.6 puta veći od kovanice a_1, pa imamo:

$$a_n = 1.6a_1, \text{ odnosno}$$

$$a_1 + (n-1) \cdot 1.5 = 1.6a_1$$

$$a_1 - 1.6a_1 + 1.5n = 1.5$$

$$-0.6a_1 + 1.5_n = 1.5$$

Nadalje, prosječan promjer jednak je zbroju promjera podijeljen sa brojem kovanica. Zbroj prvih n članova aritmetičkog niza je

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

Uvrstimo u ovaj izraz relaciju $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$, pa imamo:

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_1 + (n-1) \cdot 1.5) = \frac{n}{2}(2a_1 + 1.5n - 1.5)$$

Sada, kako je prosječan promjer svih kovanica 26, vrijedi $\dfrac{S_n}{n} = 26$. Stoga, podijelimo li gornju jednadžbu sa n, imamo:

$$\frac{S_n}{n} = \frac{\frac{n}{2}(2a_1 + 1.5n - 1.5)}{n}$$

$$26 = \frac{1}{2}(2a_1 + 1.5n - 1.5)$$

$$52 = 2a_1 + 1.5n - 1.5$$

$$2a_1 + 1.5n = 53.5$$

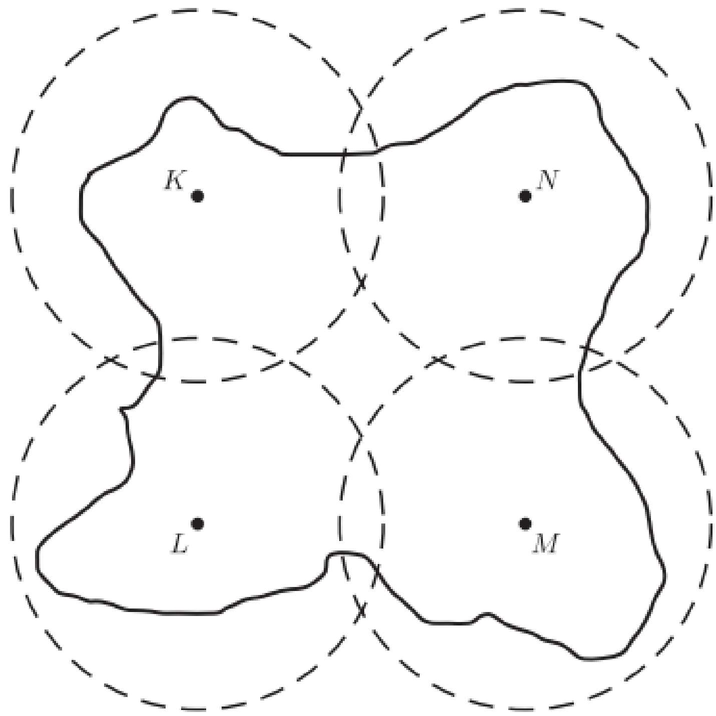
Dobili smo sustav od dvije jednadžbe s dvije nepoznanice:

$$\begin{cases} 2a_1 + 1.5n = 53.5 \\ -0.6a_1 + 1.5_n = 1.5 \end{cases}$$

Rješavanjem tog sustava dobivamo $a_1 = 20$ i $n = 9$. Dakle, 9 kovanica je u setu.

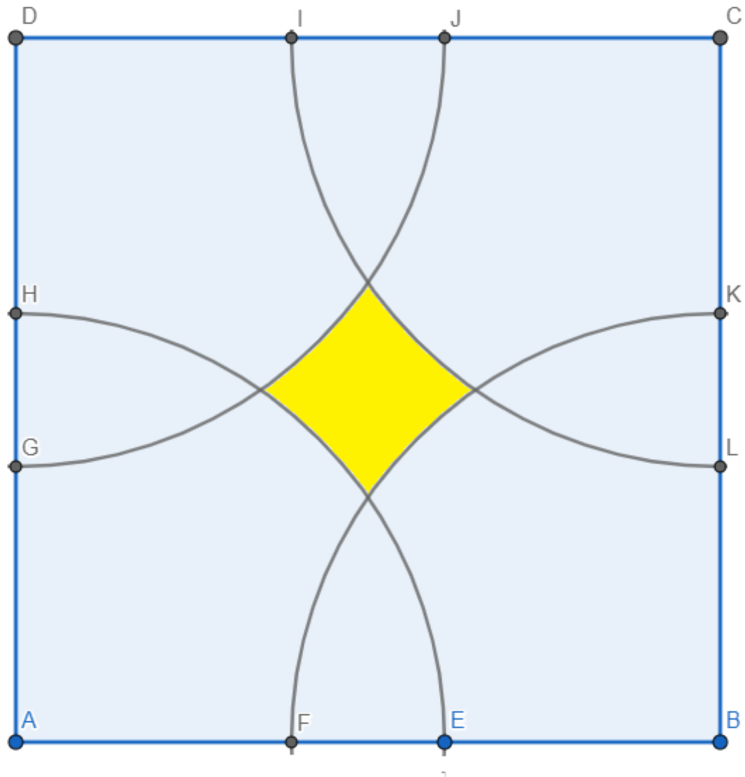
Zadatak 40

Na otoku prikazanome na skici u vrhovima kvadrata KLMN postavljena su četiri odašiljača. Stranica kvadrata duljine je 50 km, a domet svakoga odašiljača radijusa 30 km. Koliko iznosi površina otoka koja nije pokrivena signalom?

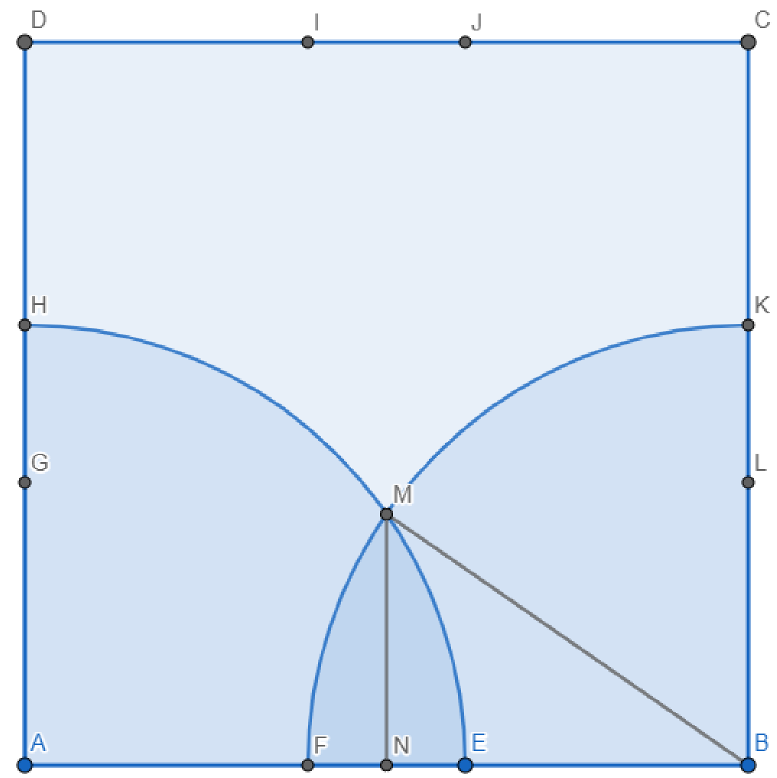


Rješenje:

Promotrimo sliku ispod:



Tražimo površinu žutog dijela. Tu površinu možemo dobiti na način da od površine kvadrata oduzmemo površine dijelova krugova, a zatim dodamo površine kružnih odsječaka u presjecima krugova. Naime, oduzmemo li od površine kvadrata površine četiri dijela kruga previše smo oduzeli jer je presjek krugova neprazan. Površina kvadrata jednaka je $P_{\square} = 50^2 = 2500$. Od toga trebamno oduzeti četiri površine četvrtine kruga radijusa 25. Ta površina jednaka je $4 \cdot \dfrac{r^2\pi}{4} = r^2\pi = 30^2\pi$. Izračunajmo sada površinu lika omedenim točkama M, F i na slici:



Tu površinu možemo izračunati na načina da od površine kružnog isječka BMF oduzmemo površinu trokuta BMN. Duljina stranice BN trokuta jednake je polovini duljine stranice kvadrata, odnosno $|\overline{BN}| = 25$. Duljina hipotenuze $\overline{BM}$ trokuta jednaka je radijusu kruga, tj $|\overline{BM}| = 30$. Sada iz Pitagorinog poučka možemo izračunati duljinu stranice $\overline{MN}$. Vrijedi:

$$|\overline{BN}|^2 + |\overline{MN}|^2 = |\overline{BN}|$$

$$|\overline{MN}|^2 = 30^2 - 25^2$$

$$|\overline{MN}|^2 = \sqrt{275} \Rightarrow |\overline{MN}| = 5\sqrt{11}$$

Površina tog pravokutnog trokuta jednaka je

$$P_\triangle = \frac{1}{2}|\overline{MN}| \cdot |\overline{BN}| = \frac{1}{2} \cdot 5\sqrt{11} \cdot 25 = 207.289$$

Izračunajmo sada mjeru kuta $\angle MBN$. Vrijedi:

$$\cos \angle MBN = \frac{25}{30}$$

$$\angle MBN = 33.5573°.$$

Sada možemo izračunati površinu kružnog isječka BMF. Ona je jednaka

$$P = \frac{r^2\pi\alpha}{360} = \frac{30^2 \cdot \pi \cdot 33.5573}{360} = 263.5584.$$

Konačno, možemo izračunati površinu dijela kruga omedenog točkama M, F, N. Ta površina je jednaka $263.5584 - 207.289 = 56.2694$. Presjeci na prvoj slici sastoje se od osam kružnih isječaka, pa je površina traženog dijela jednaka

$$P = 50^2 - 900\pi + 8 \cdot 56.2694 = 122.7\ km^2$$