B RAZINA LJETNI ROK 2023. RJEŠENJA

univ.bacc.math Robert Tadić

Zadatak 1

Koji je od navedenih brojeva iracionalan?

(a) $0.\dot{4}\dot{9}$

(b) 0.777

(c) $\sqrt{113}$

(d) $\sqrt{225}$

Rješenje:

Iracionalni brojevi su oni koje ne možemo napisati kao razlomke s cjelobrojnim koeficijentima. Dakle, svi razlomci s konačno mnogo decimala ili periodom su racionalni. Nadalje, $\sqrt{225} = 15$, pa je jedini iracionalan broj $\sqrt{113}$.

Zadatak 2

Lovrine trenutačne ocjene su: 3, 3, 4, 5 i 5. Koliko petica Lovri nedostaje da mu prosječna ocjena bude 4.5?

(a) tri

(b) četiri

(c) pet

(d) šest

Rješenje:

Prosjek ocjena računamo kao $\dfrac{\text{zbroj ocjena}}{\text{broj ocjena}}$.

Označimo nepoznanicom x broj petica koji Lovri nedostaje da mu prosječna ocjena bude 4.5. Tada je

$$\frac{3+3+4+5+5+5x}{5+x} = 4.5$$

$$\frac{20+5x}{5+x} = 4.5$$

$$20+5x = 4.5(5+x)$$

$$20+5x = 22.5+4.5x$$

$$0.5x = 2.5 \Rightarrow x = 5.$$

Dakle, nedostaje mu pet petica.
Zadatak smo mogli riješiti i direktnom provjerom, odnosno izračunati mu prosjeke ako ima tri, četiri, pet ili šest petica pa provjeriti.

Zadatak 3

Početna cijena nekog proizvoda poveća se za 50%, a zatim se dobivena umanji za 50%. Koja od navedenih tvrdnja vrijedi za konačnu cijenu toga proizvoda?

(a) Jednaka je 50% početne cijene.

(b) Jednaka je 75% početne cijene.

(c) Jednaka je 100% početne cijene.

(d) Jednaka je 125% početne cijene.

Rješenje:

Označimo početnu cijenu proizvoda nepoznanicom x. Nakon povećanja od 50% nova cijena je $x + \frac{50}{100}x = 1.5x$. Sada novu cijenu snizimo za 50%, pa je trenutna cijena proizvoda jednaka $1.5x - \frac{50}{100} \cdot 1.5x = 0.75x$. Dakle, konačna cijena je 75% početne cijene.

Zadatak 4

U nekome je razredu 13 učenika rodenih 2004. godine i 11 učenika rodenih 2005. godine. Kolika je vjerojatnost da je slučajnim odabirom odabran učenik roden 2004. godine?

(a) $\frac{1}{13}$

(b) $\frac{1}{12}$

(c) $\frac{13}{24}$

(d) $\frac{11}{13}$

Rješenje:

Vjerojatnost računamo kao $\frac{\text{Broj povoljnih dogadaja}}{\text{Broj ukupnih dogadaja}}$.

Broj ukupnih dogadaja jest 24, a broj povoljnih, odnosno onih rodenih 2004. godine jednak je 13. Stoga je tražena vjerojatnost $\frac{13}{24}$.

Zadatak 5

Koliko je dvoznamenkastih brojeva djeljivih s 5?

Rješenje:

Dvoznamenkasti brojevi djeljivi s 5 su 10,15,20,...,95. Njih je ukupno 18.

Zadatak 6

Koji se od navedenih razlomaka može skratiti za sve cijele brojeve x i y za koje je definiran?

(a) $\dfrac{3x+8y}{4xy}$

(b) $\dfrac{10xy}{2x-5y}$

(c) $\dfrac{3x-4y}{6x+8y}$

(d) $\dfrac{4y+xy}{xy-2y}$

Rješenje:

Da bismo mogli skratiti razlomke moramo i brojnik i nazivnik napisati u obliku umnoška. Prva tri izraza ne možemo pokratiti, a izlučivanjem y i u brojniku i u nazivniku četvrtog izraza imamo:

$$\frac{4y+xy}{xy-2y} = \frac{y(4+x)}{y(x-2)} = \frac{4+x}{x-2},$$

pa je točan odgovor pod d).

Zadatak 7

Čemu je jednako $x^4 \cdot \sqrt[3]{x^2}$?

(a) $x^{\frac{5}{2}}$

(b) $x^{\frac{8}{3}}$

(c) $x^{\frac{14}{3}}$

(d) $x^{\frac{11}{2}}$

Rješenje:

Prvo zapišmo $\sqrt[3]{x^2}$ u obliku potencije s bazom x. Općenito je $\sqrt[a]{x^b} = x^{\frac{b}{a}}$. Stoga je:
$\sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$. Sada, koristeći pravilo za množenje potencija s istom bazom imamo:

$$x^4 \cdot \sqrt[3]{x^2} = x^4 \cdot x^{\frac{2}{3}} = x^{4+\frac{2}{3}} = x^{\frac{14}{3}}.$$

Zadatak 8

Čemu je jednako $7^{-a} \cdot (-7)^a$ ako je a neparni cijeli broj?

(a) -7

(b) -1

(c) 1

(d) 7

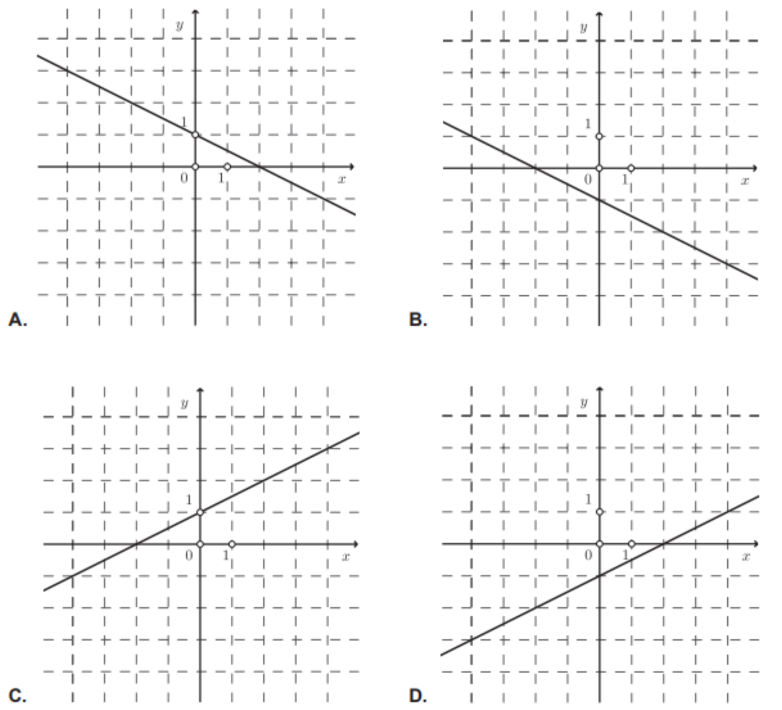
Rješenje:

Budući da je a neparan cijeli broj, to je $(-7)^a = -(7^a)$. Prema definiciji potencije s negativnim eksponentom je $7^{-a} = \dfrac{1}{7^a}$, pa imamo:

$$7^{-a} \cdot (-7)^a = \frac{-\left(7^a\right)}{7^a} = -1.$$

Zadatak 9

Na kojoj je slici prikazan graf funkcije $f(x) = -0.5x + 1$?



Rješenje:

Koeficijent uz x je negativan, pa je funkcija padajuća. Slobodni član iznosi 1, pa pravac siječe os y u točki (0,1). Dakle, a) odgovara grafu zadane funkcije.

Zadatak 10

U trenutku uključivanja klimatizacijskoga uređaja temperatura zraka u prostoriji iznosila je 28°C, a pet minuta nakon uključivanja iznosila je 26°. Kojom je od navedenih funkcija opisana ovisnost temperature T o vremenu t u minutama koje je proteklo od uključivanja klimatizacijskoga uređaja ako se temperatura smanjuje jednoliko?

(a) $T(t) = -\dfrac{5}{2}t + 26$

(b) $T(t) = -\dfrac{5}{2}t + 28$

(c) $T(t) = -\frac{2}{5}t + 26$

(d) $T(t) = -\frac{2}{5}t + 28$

Rješenje:

U trenutku $t = 0$ temperatura zraka u prostoriji iznosila je 28°C. Stoga mora vrijediti $T(0) = 28$, pa možemo eliminirati odgovore a) i c). Nadalje, analogno vrijedi $T(5) = 26$, pa je točan odgovor pod d).

Zadatak 11

Koji je od navedenih pravaca paralelan pravcu $9y + 3y = 5$?

(a) $y = -3x$

(b) $y = -\frac{1}{3}x$

(c) $y = \frac{1}{3}x$

(d) $y = 3x$

Rješenje:

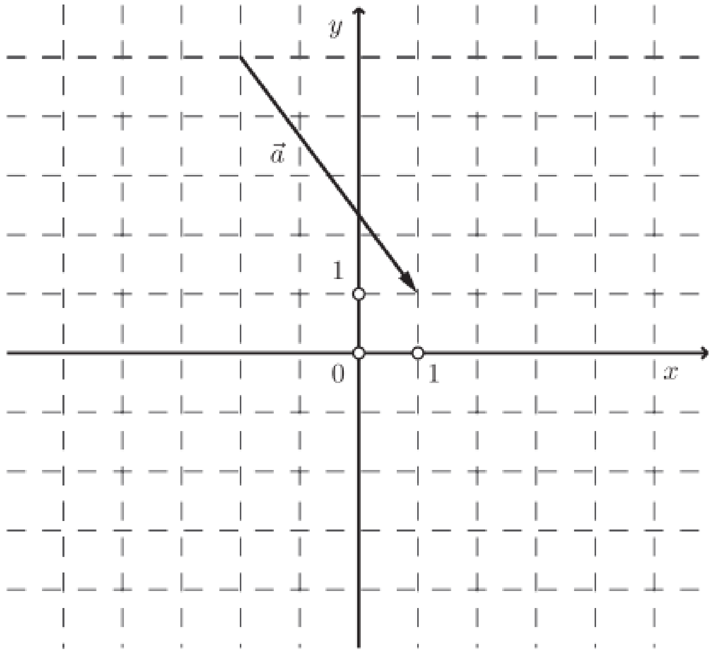
Pravci su paralelni ako su im koeficijenti smjera jednaki. Koeficijent smjera prava čitamo iz eksplicitnog oblika, pa napišimo jednadžbu pravca u eksplicitnom obliku:

$$
\begin{aligned}
9x + 3y &= 5 \\
3y &= -9x + 5 \\
y &= -3x + \frac{5}{3}
\end{aligned}
$$

Koeficijent smjera ovog pravca je -3, pa će koeficijent smjera pravca koji je paralelan s njim takoder biti -3. Dakle, točan odgovor je pod a).

Zadatak 12

Vektor $\overrightarrow{a}$ prikazan je na slici.



Što je od navedenoga zapis vektora $\overrightarrow{a}$?

(a) $\overrightarrow{a} = -4\overrightarrow{i} - 3\overrightarrow{j}$

(b) $\overrightarrow{a} = 4\overrightarrow{i} - 3\overrightarrow{j}$

(c) $\overrightarrow{a} = -3\overrightarrow{i} + -4\overrightarrow{j}$

(d) $\overrightarrow{a} = 3\overrightarrow{i} - 4\overrightarrow{j}$

Rješenje:

Koordinatne početne točke vektora $\overrightarrow{a}$ su (-2,5), a krajnje (1,1). Stoga vektor $\overrightarrow{a}$ možemo zapisati kao:

$$\overrightarrow{a} = (1-(-2))\overrightarrow{i} + (1-5)\overrightarrow{j} = 3\overrightarrow{i} - 4\overrightarrow{j}$$

Zadatak 13

Koja je od navedenih tvrdnja točna za svaki trokut?

(a) Težište dijeli težišnicu u omjeru 2:1

(b) Visina trokuta spaja vrh i polovište nasuprotne stranice trokuta.

(c) Simetrala kuta trokuta okomita je na stranicu nasuprotnu tomu kutu

(d) Simetrale stranica trokuta sijeku se u ortocentru.

Rješenje:

Tvrdnja pod a) važno je svojstvo težišta i ona je točna.
Tvrdnje b) i c) ne vrijede općenito, već samo za jednakokračne trokute, a ortocentar je sjecište visina trokuta.

Zadatak 14

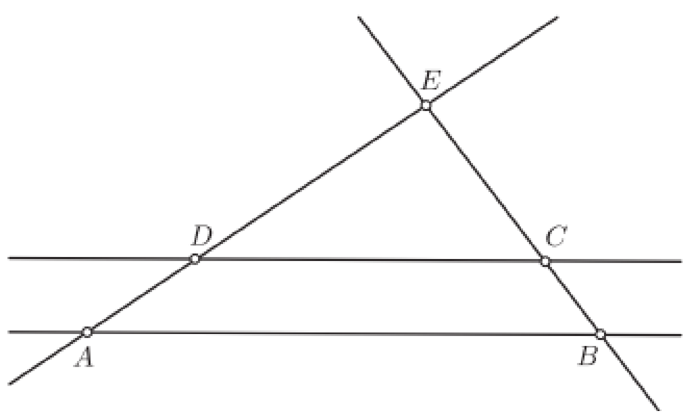
Pravci AB i CD prikazani na skici su paralelni. Ako je$|BC| : |CE| = 3 : 5$ i $|AB| = 24$ cm, kolika je duljina dužine $|CD|$?

(a) 9

(b) 9.6

(c) 14.4

(d) 15



Rješenje:

Trokuti $\triangle ABE$ i $\triangle CDE$ su slični. Budući da je $|BC| : |CE| = 3 : 5$, to je $|BE| : |CE| = 8 : 5$, pa je:

$$|BE| : |CE| = 8 : 5 = |AB| : |CD|$$

$$\frac{8}{5} = \frac{24}{|CD|}$$

$$3|CD| = 24 \cdot 5 \Rightarrow |CD| = 15$$

Zadatak 15

Koja od navedenih tvrdnji **nije** točna?

(a) Obodni je kut nad promjerom pravi.

(b) Obodni je kut dvostruko manji od pripadnoga središnjeg kuta.

(c) Ako se opseg kruga poveća dva puta, dva mu se puta poveća i površina.

(d) Ako se polumjer kruga poveća dva puta, dva mu se puta poveća i opseg.

Rješenje:

Prve dvije tvrdnje su oznate činjenice o trokutima. Promotrimo treću tvrdnju. Opseg kruga radijusa $2r$ jednak je $2r\pi$. Ako se opseg kruga poveća dva puta, njegov je opseg $4r\pi$, odnosno radijus mu se povećao 2 puta. Površina trokuta radijusa $2r$ jednaka je $(2r)^2\pi = 4r^2\pi$, a površina trokuta radijusa r jednaka je $r^2\pi$. Dakle, ako se opseg kruga poveća dva puta, površina se poveća 4 puta, pa tvrdnja c) nije točna.

Zadatak 16

Duljine kateta pravokutnoga trokuta su 5 cm i 12 cm. Koliko iznosi tangens kuta nasuprot kraćoj kateti?

(a) $\frac{5}{13}$

(b) $\frac{5}{12}$

(c) $\frac{12}{13}$

(d) $\frac{12}{5}$

Rješenje:

U pravokutnome trokutu tangens kuta jednak je omjeru nasuprotne katete i priležeće katete. Nasuprot kraće katete je manji kut, pa je tangens traženog kuta $\frac{5}{12}$.

Zadatak 17

Čemu je jednako jedno rješenje kvadratne jednadžbe $x^2 - x - c = 0$?

(a) $\dfrac{-1+\sqrt{1-4c}}{2}$

(b) $\dfrac{-1+\sqrt{1+4c}}{2}$

(c) $\dfrac{1+\sqrt{1-4c}}{2}$

(d) $\dfrac{1+\sqrt{1+4c}}{2}$

Rješenj:

Koristimo formulu za rješenja kvadratne jednadžbe

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

U zadanoj kvadratno jednadžbi je $a = 1, b = -1$ i $c = -c$. Uvrštavanjem u gornj izraz imamo:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = x_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-c)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4c}}{2},$$

pa vidimo da je točan odgovor pod d).

Zadatak 18

Koja od navedenih tvrdnja vrijedi za rješenja svih kvadratnih jednadžba kojima je diskriminanta jednaka 19?

(a) Rješenja su realni brojevi

(b) Rješenja nisu realni brojevi

(c) Umnožak rješenja iznosi 19

(d) Zbroj rješenja iznosi 10

Rješenje:

Diskriminanta $D = b^2 - 4ac$ kvadratne jednadžbe govori sljedeće o rješenjima

- Ako je $D \geq 0$ onda jednadžba ima dva različita realna rješenja
- Ako je $D = 0$ onda jednadžba ima jedno realno rješenje
- Ako je $D \leq 0$ onda jednadžba nema realnih rješenja

Dakle, ako je diskriminanta 19 onda jednadžba ima dva realna rješenja, tj. rješenja su realni brojevi.

Zadatak 19

Kojoj je od navedenih funkcija slika$[6, +\infty\rangle$

(a) $f(x) = -x^2 - 6$

(b) $f(x) = -x^2 + 6$

(c) $f(x) = x^2 - 6$

(d) $f(x) = x^2 + 6$

Rješenje:

Slika kvadratne funkcije $f(x) = x^2$ je $[0, +\infty\rangle$. Slika kvadratne funkcije $f(x) = x^2 + c$ jednaka je $[c, +\infty\rangle$. Stoga funkcija zadana pod d) ima traženu sliku.

Zadatak 20

Ako je u aritmetičkome nizu prvi član –2, a peti član 26, koliko iznosi zbroj prvih pet članova toga niza?

(a) 60

(b) 70

(c) 120

(d) 140

Rješenje:

Iskoristimo formulu za sumu prvih n članova aritmetičkog niza:

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

Tada je suma prvih 5 članova jednaka:

$$S_5 = \frac{5}{2}(a_1 + a_5)$$

Iz navedenih podataka vrijedi $a_1 = -2$ i $a_5 = 26$. Stoga je:

$$S_5 = \frac{5}{2}(-2 + 26) = 60.$$

Zadatak 21.1

Zapišite broj 620 milijuna znanstvenim zapisom.

Rješenje:

Općenito, znanstveni zapis broja je $a \cdot 10^n$, pri čemu je $1 \leq |a| < 10$. Sada zbroj 620 milijuna možemo napisati kao $6.2 \cdot 10^8$.

Zadatak 21.2

Površina Saturna iznosi približno $4.27 \cdot 10^{10}$, a Zemlje $5.1 \cdot 10^8$. Za koliko je površina Saturna veća od površine Zemlje?

Rješenje:

Dovoljno je oduzeti površinu Zemlje od površine Saturna. Ukoliko kalkulator račun nije moguće izvršiti na kalkulatoru, onda imamo:

$4.27 \cdot 10^{10} - 5.1 \cdot 10^8 = 427 \cdot 10^8 - 5.1 \cdot 10^8 = 421.9 \cdot 10^8 = 4.219 \cdot 10^{10}$.

Zadatak 22

Zadani su brojevi $A = 8x^3y$ i $B = \dfrac{1}{2}x^{-3}y^2$.

Zadatak 22.1

Izračunajte $A \cdot B$.

Rješenje:

Vrijedi:

$$A \cdot B = 8x^3y \cdot \frac{1}{2}x^{-3}y^2 = 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot x^3x^{-3}yy^2 = 4 \cdot x^{3-3}y^{1+2} = 4y^3$$

Zadatak 22.2

Izračunajte B^{-4}.

Rješenje:

$$B^{-4} = \left(\frac{1}{2}x^{-3}y^2\right)^{-4} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-4} x^{-3^{-4}} y^{2^{-4}} = 16x^{12}y^{-8}$$

Zadatak 23

Zadan je izraz $16y^2 + 3x(3x - 8y)$.

Zadatak 23.1

Izračunajte vrijednost zadanoga izraza za $x = 1$ i $y = -2$.

Rješenje:

Ubacimo $x = 1$ i $y = -2$ u zadani izraz, pa imamo:

$$16y^2 + 3x(3x - 8y) = 16 \cdot (-2)^2 + 3 \cdot 1(3 \cdot 1 - 8 \cdot (-2)) = 121.$$

Zadatak 23.2

Izraz zapišite u obliku kvadrata binoma.

Rješenje:

Vrijedi:

$$16y^2 + 3x(3x - 8y) = 16y^2 + 9x^2 - 24xy = (4y - 3x)^2.$$

Zadatak 24.1

Riješite jednadžbu $2 - \dfrac{7m + 1}{5} = m$.

Rješenje:

Pomnožimo jednadžbu s 5. Tada imamo

$$
\begin{aligned}
10-(7m+1) &= 5m \\
10-7m-1 &= 5m \\
-7m-5m &= -9 \\
-12m &= -9 \\
m &= \frac{9}{12}=\frac{3}{4}
\end{aligned}
$$

Zadatak 24.2

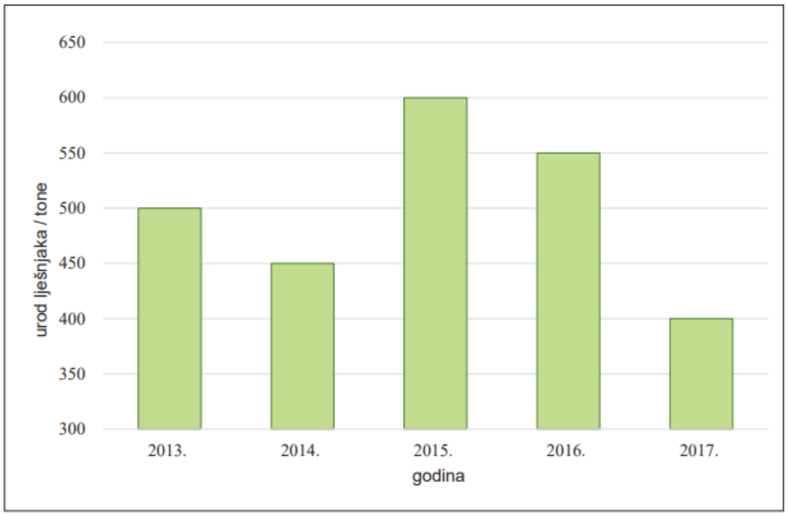
Marko u jednoj minuti pretrči 200 metara, a Luka u jednoj minuti biciklom prijede 500 metara. Ako je svaki od njih prešao put od šest kilometara, koliko je minuta više Marko trčao nego što je Luka vozio bicikl?

Rješenje:

Marko u jednoj minuti pretrči 200 metara. Ako je prešao put od 6 kilometara, odnosno 6000 metara, trčao je $\frac{6000}{200}=30$ minuta. Slično, Luka je vozio bicikl $\frac{6000}{500}=12$ minuta. Dakle, Marko je trčao 18 minuta više nego što je Luka vozio bicikl.

Zadatak 25

Grafikon prikazuje urod lješnjaka izražen u tonama od 2013. do 2017. godine.



Zadatak 25.1

Koliko iznosi ukupan urod lješnjaka u svih pet godina?

Rješenje:

Jednostavno zbrojimo podatke iz tablice, pa je ukupan broj lješnjaka jednak $500 + 450 + 600 + 550 + 400 = 2500$ tona.

Zadatak 25.2

Za koliko se posto smanjio urod lješnjaka 2016. godine u odnosu na 2015. godinu?

Rješenje:

2016. godine bilo je 550 tona lješnjaka, a 2015. 600 tona. Dakle, 2016. je bilo $\frac{550}{600} = 0.91\dot{6} = 91.\dot{6}\%$. Stoga se urod smanjio za $100\% - 91.\dot{6}\% = 8.\dot{3}\%$.

Zadatak 26

Pravac p zadan je jednadžbom $3x - 2y + a = 0$.

Zadatak 26.1

Za koju vrijednost parametra a točka $T(2,3)$ pripada pravcu p?

Rješenje:

Ako točka (2,3) pripada pravcu, to znači da ako ubacimo u jednadžbu x=2 i y=3 da jednakost mora biti zadovoljena. Stoga je :

$$3 \cdot 2 - 2 \cdot 3 + a = 0 \Rightarrow a = 0.$$

Zadatak 26.2

Koliko iznosi mjera kuta koji pravac p zatvara s pozitivnim smjerom osi apscisa?

Rješenje:

Tangens kuta koji pravac zatvara s osi x jedna je koeficijentu smjera pravca. Pravac je zadan jednadžbom $3x - 2y = 0$, pa je njegov eksplicitni oblik $y = \frac{3}{2}x$. Označimo sa φ traženi kut, pa je

$$tg\varphi = \frac{3}{2}$$
$$\varphi = tg^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)$$
$$\varphi = 56°18'36''$$

Zadatak 27

Zadana je kvadratna funkcija $f(x) = 3x^2 + 12x - 15$.

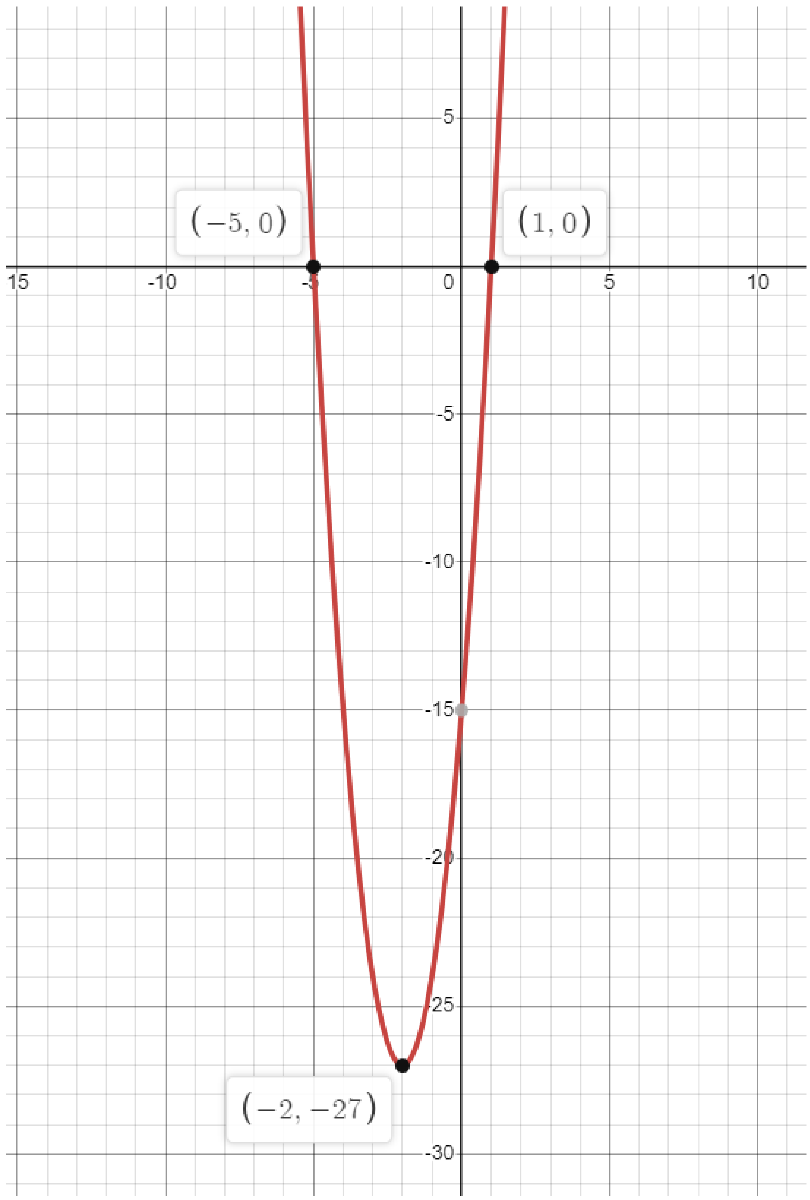
Zadatak 27.1

Napišite jednadžbu simetrije grafa funkcije f.

Rješenje:

Nacrtajmo graf funkcije f. Moramo odrediti nultočke i koordinate tjemena. Nultočke su rješenja kvadratne jednadžbe $3x^2 + 12x - 15 = 0$, a to su -5 i 1.

Nadalje, koordinate tjemena dane su sa $\left(\frac{-b}{2a}, \frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$, pa su koordinate tjemena ove funkcije $\left(\frac{-12}{2 \cdot 3}, \frac{12^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-15)}{4 \cdot 3}\right) = (-2, -27)$. Dakle, graf funkcije izgleda kao na slici:



Os simetrije je pravac paralelan s osi y koji prolazi tjemenom. Njegova jednadžba je $x = -2$.

Zadatak 27.2

Odredite sve realne brojeve x za koje funkcija f poprima negativne vrijednosti.

Rješenje:

Sa grafa vidimo da funkcija poprima negativne vrijednosti na intervalu $\langle -5, 1\rangle$.

Zadatak 28

Zadana je funkcija $f(x) = \dfrac{x-9}{x+1}$.

Zadatak 28.1

Odredi nultočku funkcije f.

Rješenje:

Nultočke funkcije su oni argumenti x za koje je $f(x) = 0$. U ovom slučaju:

$$f(x) = 0$$

$$\frac{x-9}{x+1} = 0$$

$$x - 9 = 0 \Rightarrow x = 9$$

Nultočka funkcije je $x = 9$.

Zadatak 28.2

Odredite domenu funkcije f

Rješenje:

Jedini uvjet na domenu zadane funkcije je da nazivnik mora biti različit od 0, odnosno $x + 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$¸. Dakle, domena funkcije je $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Zadatak 29

Ratar želi ograditi zemljište u obliku trokuta. Duljine dviju strana ograde su 72 m i 55 m, a kut izmedu njih je 83°.

Zadatak 29.1

Koliko iznosi površina toga zemljišta?

Rješenje:

Koristimo formulu za površinu trokuta $P = \frac{1}{2}a \cdot b \sin\gamma$. Tada je $P = \frac{1}{2} \cdot 72 \cdot 55 \cdot \sin(83^\circ) m^2 = 1965.24138 m^2$.

Zadatak 29.2

Koliko iznosi duljina ograde koju ratar treba postaviti oko toga zemljišta?

Rješenje:

Duljina ograde koju ratar treba postaviti jednaka je opsegu tog trokuta. Trebamo izračunati treću stranicu, pa koristimo poučak o kosinusu:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

$$c^2 = 72^2 + 55^2 - 2 \cdot 55 \cdot 72 \cdot \cos(83^\circ)$$

$$c^2 = 7243.7948 \Rightarrow c = \sqrt{7243.7948} = 85.11$$

Sada je opseg trokuta jednak

$$O = a + b + c = 72 + 55 + 85.11 = 212.11$$

Zadatak 30

Duljina je osnovnoga brida pravilne trostrane prizme 6 cm, a visina je prizme 9 cm.

Zadatak 30.1

Koliko iznosi volumen te prizme?

Rješenje:

Volumen prizme jednak je $V = B \cdot v$, pri čemu je B površina baze, a v visina prizme. Baza pravilne trostrane prizme je jednakostraničan trokut, a njegova površina jednaka je $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, pa je :

$$V = B \cdot v = \frac{6^2\sqrt{3}}{4} \cdot 9 = 81\sqrt{3}.$$

Zadatak 30.2

Oplošje prizme sastoji se od dva jednakostranična trokuta i tri pravokutnika. Površina jednakostraničnog trokuta je opet $\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$, a površina pravokutnika je $9 \cdot 6 = 54$. Dakle, oplošje je jednako:

$$O = 2 \cdot 9\sqrt{3} + 3 \cdot 54 = 18\sqrt{3} + 162.$$