A RAZINA JESENSKI ROK 2022. RJEŠENJA

univ.bacc.math Robert Tadić

Zadatak 1

Kolika je vrijednost broja $1 + \frac{\sin(90^\circ)}{2}$ zaokružena na pet decimala?

Rješenje:

Ovaj zadatak rješavamo pomoću kalkulatora. Pripazite da je kalkulator namješten na stupnjeve, a ne na radijane. Unesimo traženi račun u kalkulator i dobijamo rezultat 1.38302222155949. Budući da je šesta znamenka strogo manja od 5, rješenje zaokruženo na pet decimala je 1.38302

Zadatak 2

Ana je pročitala na internetu da promjer bakterija može biti 0.001 milimetar, a da su virusi sto puta manji od bakterija. Koliki je prema tim podatcima promjer virusa izražen u metrima?

Rješenje:

Promjer bakterija je 0.001 milimetar. Promjer vrirusa je sto puta manji od promjera bakterija, pa je stoga promjer virusa $\dfrac{0.001}{100} = 0.00001 =$

10^{-5} milimetara. Želimo taj rezultat izraziti u metrima. Budući da jedan metar ima 1000 milimetara, jedan milimetar ima $\frac{1}{1000}$ metara, odnosno 10^{-3} metara. Stoga je 10^{-5} milimetara jednako $10^{-5} \cdot 10^{-3}$ metara. Korištenjem pravila za množenje potencija s istom bazom dobijamo konačan rezultat 10^{-8} metara

Zadatak 3

Koja je od navedenih jednakosti točna za svaka dva realna broja x i y za koje su izrazi definirani?

A) $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 1$

B) $\frac{x}{y} - \frac{y}{x} = 1$

C) $\frac{x}{y} \cdot \frac{y}{x} = 1$

D) $\frac{x}{y} : \frac{y}{x} = 1$

Rješenje:

Primjetimo da jedini izraz koji možemo pokratiti jest pod C). Kratimo x u brojniku i nazivniku i y u brojniku i nazivniku i dobijamo konstantu 1. U zadatku stoji i uvjet za sve x i y za koje su izrazi definirani.Taj uvjet je samo ograničenje da su x i y različiti od 0. U protivnom bi u nazivniku imali 0, što nije definiran izraz.

Zadatak 4

Banka se za zamjenu američkih dolara u eure koristi formulom $e = 1.3d - 1.2$, gdje je e iznos u eurima, a d iznos u američkim dolarima. Koja od navedenih tvrdnja opisuje značenje broja 1.2 u formuli?

A) Banka za uslugu zamjene valute naplaćuje 1.2 američka dolara.

B) Banka za uslugu zamjene valute naplaćuje 1.2 eura.

C) Jedan euro vrijedi 1.2 američka dolara.

D) Jedan američki dolar vrijedi 1.2 eura.

Rješenje:

U danoj formuli iznos američkih dolara d pomnožimo s 1.3 i zatim iznos umanjimo za 1.2. Dakle, neovisno o iznosu dolara d, banka odbija troškove usluge od 1.2 američka dolara. Nadalje, iz formule možemo saznati da jedan američki dolar vrijedi 1.3 eura (Uvrstimo d=1 i maknemo usluge zamjene) i koliko jedan euro vrije u američkim dolarima (Riješimo jednadžbu 1=1.3x) Dakle, točan odgovor je pod B)

Zadatak 5

Trkač je u prvoj minuti istrčao 30 % duljine staze, a u svakoj sljedećoj minuti za 5 % više nego u prethodnoj. Koja je od navedenih tvrdnja točna nakon prve 3 minute utrke?

A) Trkač je istrčao cijelu stazu za manje od 3 minute.

B) Trkač se nalazi točno na cilju.

C) Trkaču je preostalo manje od 4

D) Trkaču je preostalo više od 4

Rješenje:

U prvoj minuti trkač je istrčao 30% staze. U sljedećoj minuti je istrčao 5% više nego u prethodnoj, pa je u drugoj minuti istrčao $30+\frac{5}{100}\cdot 30 = 31.5$. Analogno, u trećoj minuti je istrčao $31.5 + \frac{5}{100} \cdot 31.5 = 33.075$.

Dakle, ukupno je pretrčao $30 + 31.5 + 33.075 = 94.575\%$ staze, pa mu je preostalo više od 4% staze.

Zadatak 6

Pravac y = kx + l zadan je tablicom:

x	1	2	3
y	3		-3

Koji broj treba upisati u prazno polje tablice?

Rješenje:

Koristimo formulu za jednadžnu pravca kroz dvije točke (Ne treba je pamtiti, ima je u knjižici formula):

$$y - y_1 = k \cdot (x - x_1),\ k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

.

Iz tablice pročitamo dvije točke kojima pravac prolazi, to su točke (1,3) i (3,-3). Dakle, u formuli koristimo

$$(x_1, y_1) = (1, 3), (x_2, y_2) = (3, -3).$$

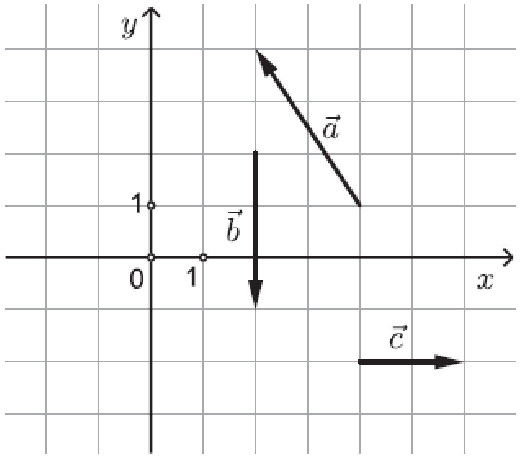
Stoga imamo:

$$k = \frac{-3 - 3}{3 - 1} = -3, \text{ pa i } y - 3 = -3 \cdot (x - 1).$$

Transformiranjem te jednadžbe dobijemo $y = -3x + 6$ i to je tražena jednadžba pravca. Kako pi dopunili tablicu u jednadžbu pravca moramo uvrstiti x=2, pa imamo $y = -3 \cdot 2 + 6$ to jest y=0 je traženo rješenje.

Zadatak 7

Na slici su prikazani vektori $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$.



.

Čemu je jednak vektor $\overrightarrow{c}$?

A) $-\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$

B) $-\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$

C) $\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$

D) $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$

Rješenje:

Vektore $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$ zbrajamo na način da početnu točku vektora $\overrightarrow{b}$ stavimo u krajnju točku vektora $\overrightarrow{a}$ te spojimo početnu točku vektora $\overrightarrow{a}$ i krajnju točku vektora $\overrightarrow{b}$. Oduzimanje vektora $\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$ shvaćamo kao zbrajanje vektora $\overrightarrow{a}$ i vektora $-\overrightarrow{b}$, pa napravimo isti postupak. Uočavamo da vektor $-\overrightarrow{c}$ dobijemo direktno zbrajanjem vektora $\overrightarrow{a}$ i vektora $\overrightarrow{b}$. Dakle $-\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} \Rightarrow \overrightarrow{c} = -\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$

Zadatak 8

Odredite polumjer i koordinate središta kružnice zadane jednadžbom: $(x+2)^2 + (y-7)^2 = 4$.

Rješenje:

Jednadžba kružnice sa središtem u (x_1, y_1) i duljinom radijusa r glasi:

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = r^2.$$

Sada iz zadane kružnice čitamo: $x_1 = -2$, $y_1 = 7$ i $r = 2$. Dakle, polumjer kružnice je 2, a koordinate središta su (-2,7)

Zadatak 9

Koji je od navedenih izraza jedan od faktora pri rastavu izraza $xy - y^2 + (x - y)^2 + x - y$?

A) $x + 1$

B) $y + 1$

C) $2x + 1$

D) $2y + 1$

Rješenje:

Potrebno je faktorizirati traženi izraz. Prvo izlučimo y iz prva dva pribrojnika. Tada dobivamo:

$$y(x - y) + (x - y)^2 + x - y.$$

Sada možemo izlučiti x-y iz tri pribrojnika te imamo:

$$(x - y) \cdot (y + x - y + 1)$$

to jest:

$$(x - y) \cdot (x + 1).$$

Dakle, jedini faktor koji se pojavljuje od ponudenih jest x+1

Zadatak 10

Koliko se puta znamenka 0 pojavljuje u broju $25^{10} \cdot 4^{13}$

Rješenje:

U zadacima ovog tipa, u kojima nas se pita koliko neki broj sadrži znamenki 0 ili koliko sadrži znamenki općenito, izraz želimo napisati u obliku $a \cdot 10^n$, za neke brojeve a i n. Dakle, imamo:

$$25^{10} \cdot 4^{13} = 5^{2^{10}} \cdot 2^{2^{13}} = 5^{20} \cdot 2^{26} = 5^2 0 \cdot 2^{20} \cdot 2^6 = 10^{20} \cdot 2^6$$

Prvi faktor 10^{20} ima 20 nula, a drugi faktor 2^6 ne sadrži znamenku nula. Stoga zaključujemo da broj $25^{10} \cdot 4^{13}$ ima ukupno 20 znamenki nula.

Zadatak 11

Koji je od navedenih dogadaja najvjerojatniji ako slučajnim odabirom odaberemo jednoga maturanta?

A) Roden je u petak

B) Roden je tijekom vikenda

C) Roden je u travnju

D) Roden je u jesen

Rješenje:

Izračunajmo vjerojatnosti svakog dogadaja. Vjerojatnost se računa kao $\frac{\text{broj povoljnih dogadaja}}{\text{broj ukupnih dogadaja}}$. Stoga je vjerojatnost da je maturant roden u petak jednaka $\frac{1}{7}$, a vjerojatnost da je roden tijekom vikenda $\frac{2}{7}$. Vjerojatnost da je maturant roden u travnju jendaka je $\frac{30}{365}$ (Travanj ima 30 dana, a godina 365). Konačno, vjerojatnost da je maturant roden tijekom jeseni je $\frac{89}{365}$, budući da jesen traje 89 dana. Usporedujući dobivene vjerojatnosti zaključujemo da je najvjerojatniji dogadaj da je maturant roden tijekom vikenda.

Zadatak 12

U voćnjaku je 2020. godine ubrano tri puta više voća nego 2019., a 2021. za 1200 kg manje nego 2019. i 2020. zajedno. Ako je 2021.

godine ubrano više od 5000 kilograma voća, koliko je ubrano 2019. godine?

Rješenje:

Označimo broj kilograma voća ubranog 2019. godine nepoznanicom x. Tada je broj voća ubranog 2020. godine jednak $3x$. Budući da je 2021. godine ubrano 1200 kg manje nego 2019. i 2020. zajedno, imamo da je 2021. godine ubrano ukupno $x + 3x - 1200$ to jest $4x - 1200$. Nadalje, znamo da je 2021. godine ubrano više od 5000kg voća. Stoga je:

$$4x - 1200 > 5000$$

$$4x > 6200$$

$$x > 1550$$

Dakle, 2019. godine ubrano je više od 1550kg voća.

Zadatak 13

Koja od navedenih tvrdnja ne vrijedi za jednakostraničan trokut?

A) Zbroj polumjera upisane i polumjera opisane kružnice trokutu jednak je visini toga trokuta.

B) Polumjer kružnice opisane trokutu dva je puta veći od polumjera kružnice upisane tomu trokutu.

C) Visina trokuta tri je puta veća od polumjera kružnice upisane tomu trokutu.

D) Visina trokuta dva je puta veća od polumjera kružnice opisane tomu trokutu.

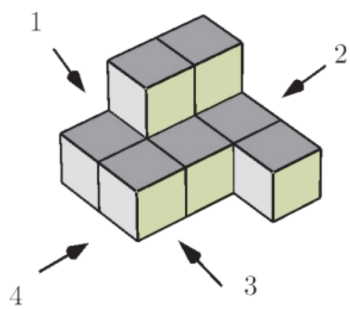
Rješenje:

U jednakostraničnom trokutu središte opisane i upisane kružnice se podudaraju i ta točka leži na sjecištu visina. Visina u jednakostraničnom

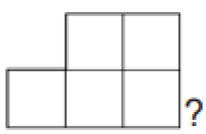
trokutu je ujedno i težišnica, pa ta točka dijeli visinu u dva dijela koji se odnose kao 2:1 pri čemu je prva dužina od vrha trokuta do središta, a druga od središta do nožišta visine.
Sada se lako vidi da su tvrdnje A), B) i C) istinite, odnosno tvrdnja D) neistinita. Budući da se tvrdnje C) i D) medusobno isključuju, točno jedan od njih mora biti neistinit. Stoga, kako je medu zadacima s ponudenim odgovorima uvijek samo jedan točan dovoljno je promatrati samo odgovore C) i D) da bi uspješno riješili zadatak.

Zadatak 14

Na skici je prikazano tijelo koje promatramo s četiriju strana: 1, 2, 3 i 4.

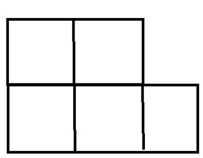


S koje strane trebamo promatrati tijelo da bi vidjeli lik oblika

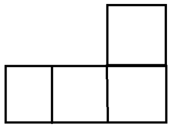


Rješenje:

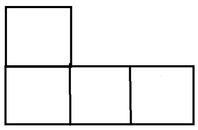
Ako promatramo tijelo sa strane 1) onda vidimo oblik:


.

Ako promatramo sa strane 2) vidimo oblik



Ako promatramo sa strane 4) vidimo oblik:

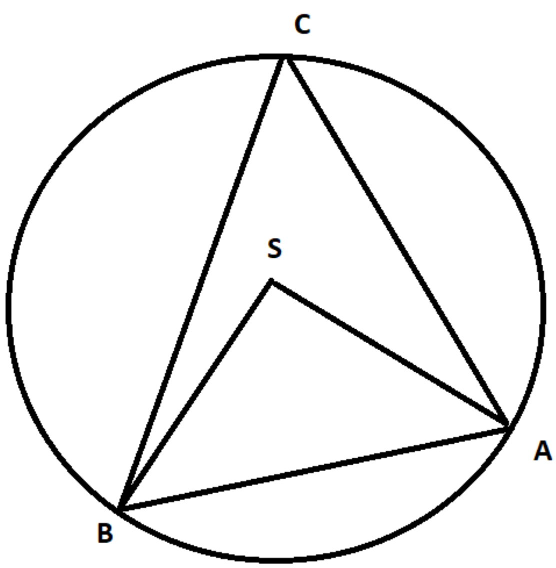


Promatranjem sa strane 3) dobivamo traženi oblik.

Zadatak 15

Koliki je polumjer kružnice kojoj je duljina jedne tetive 15 cm, a obodni kut nad tom tetivom 80°?

Rješenje:



Obodni kut nad tetivom AB je kut $\angle ACB$. Prema poučku o obodnom i središnjem kutu **Središnji kut dva puta je veći od obodnog**. Stoga kut $\angle ASB$ iznosi 160°. Trokut $\triangle ASB$ je jednakokračan, pa su kutovi u vrhu A i vrhu B jednaki. Budući da je suma kutova u trokutu jednaka 180° dobivamo da je $\angle SBA = \angle SAB = 10°$. Sada možemo iskoristiti poučak o sinusu. Vrijedi:

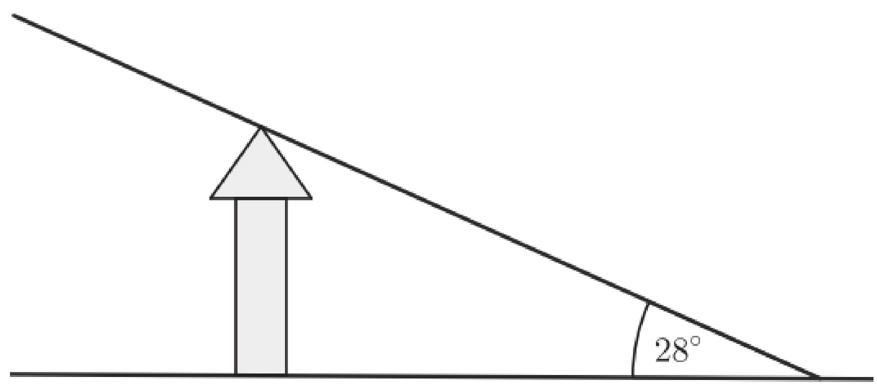
$$\frac{15}{\sin 160^\circ} = \frac{r}{\sin 10^\circ}$$

pri čemu je r polumjer kružnice. Stoga iz gornje jednadžbe slijedi:

$$r = \frac{15 \cdot \sin 10^\circ}{\sin 160^\circ} = 7.62$$

Zadatak 16

Na udaljenosti 60.7 metara od podnožja tornja mjernim je instrumentom izmjeren kut mjere 28° prikazan na skici. Koliko treba približiti mjerni instrument tornju da se mjera kuta poveća za 5°?



Rješenje:

Pomoću trigonometrijskih formula koje vrijede u pravokutnom trokutu možemo izračunati visinu tornja. Vrijedi

$$\text{tangens kuta} = \frac{\text{nasuprotna kateta}}{\text{priležeća kateta}}$$

$$\tan 28^\circ = \frac{h}{60.7}$$

iz čega dobivamo da je visina tornja h=32.2748. Sada ponovno koristimo formulu za tangens u pravokutnome trokutu, ali nam je nepoznata priležeća kateta i kut je jednak 28°.

$$\tan 33^\circ = \frac{32.2748}{x}$$

iz čega slijedi da je kut u vrhu mjerong instrumenta jednak 33° ako je duljina udaljenosti od podnožja x jednaka 49.7cm. Dakle, mjerni instrument je potrebno približiti za 60.7-49.7=11 metara.

Zadatak 17

U bazenu oblika valjka promjera 3.7 m visina vode iznosi 65 cm. Koliko klora treba staviti u bazen ako je za 10 m^3 vode potrebno 150 g klora?

Rješenje:

Promjer baze valjka iznosi 3.7m, pa je polumjer baze valjka $\frac{3.7}{2} = 1,85$ metara. Nadalje, visinu vode od 65 cm izraziti ćemo u metrima, pa je visina vode jednaka 0.65m. Sada je volumen vode u bazenu jednak

$$V = B \cdot h$$
$$V = r^2\pi \cdot h$$
$$V = 1.85^2\pi \cdot 0.65 \approx 7m^3$$

Za $10m^3$ vode potrebno je 150g klora. Stoga je za $1m^3$ vode potrebno 15g klora, odnosno za $7m^3$ vode jednaka $7 \cdot 15 = 105$ grama klora

Zadatak 18

Što nastaje rotacijom šiljastokutnoga trokuta ABC oko jedne njegove stranice?

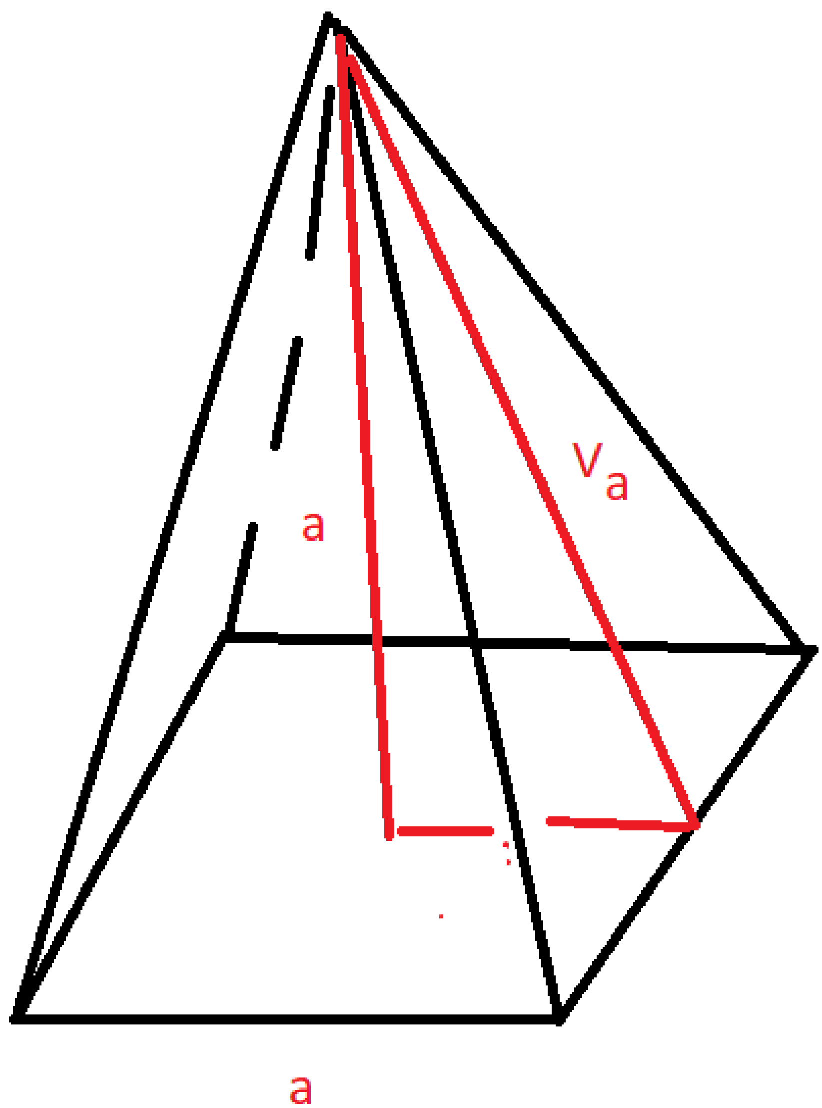
Rješenje:

Rotacijom šiljastokutnog trokuta ABC oko jedne njegove stranice nastaju dva stošca spojena bazama. Polumjer baze tih stožaca jednak je visini na stranicu oko koje trokut rotita, a visine tih stožaca jednake su udaljenostima vrhova stranice do nožišta visine na tu stranicu.

Zadatak 19

Koliko je oplošje pravilne četverostrane piramide kojoj je duljina osnovnoga brida a jednaka visini piramide?

Rješenje:



Oplošje četverostrane piramide sastoji se od kvadrata i četiri trokuta. Površina kvadrata je a^2, a površina jednog trokuta jednaka je $\frac{a \cdot v_a}{2}$. Budući da oplošje trebamo izraziti samo preko stranice a, potrebno je visinu trokuta izraziti preko stranice a. Promotrimo sliku. Iz Pitagorinog poučka imamo:

$$(\frac{a}{2})^2 + a^2 = v_a^2$$

$$\frac{a^2}{4} + a^2 = v_a^2$$
$$5a^2 = 4v_a^2$$
$$v_a^2 = \frac{5}{4}a^2$$
$$v_a = \sqrt{\frac{5}{4}a^2}$$
$$v_a = \frac{a}{2}\sqrt{5}$$

Stoga je oplošje piramide jednako $a^2 + 4 \cdot \frac{a \cdot v_a}{2} = a^2 + 4 \cdot \frac{a \cdot \frac{a}{2} \cdot \sqrt{5}}{2} = a^2 + a^2\sqrt{5} = a^2 \cdot (1 + \sqrt{5})$

Zadatak 20

Koliko je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}$$

Rješenje:

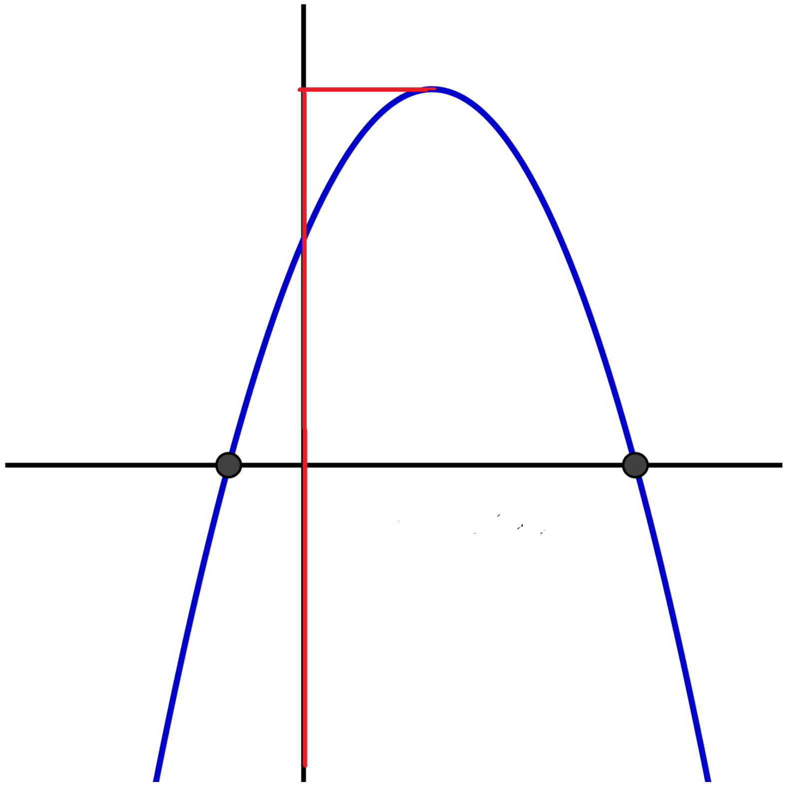
Navedeni je limes jednak $\frac{1}{\infty} = 0$

Zadatak 21

Kolika je vrijednost parametra k u kvadratnoj funkciji $f(x) = -x^2 - 2x + k$ čija je slika interval $< -\infty, 3]$?

Rješenje:

Slika funkcije su sve vrijednosti koje f(x) može postići. Navedena funkcija je kvadratna, koeficijent uz x^2 je negativan pa je graf parabola koja "plače". Sliku kvadratne funkcije možemo iščitati i s grafa.

 . Dakle, sa slike vidimo da ova kvadratna funkcija poprima sve vrijednosti od $-\infty$ do druge koordinate tjemena. Za koordinate tjemena imamo formulu, a druga koordinata tjemena je dana sa $\frac{4ac-b^2}{4a}$. Imamo: a=-1, b=-2 i c=k. Iz uvjeta zadatka želimo da je slika funkcije interval $<-\infty, 3]$, pa postavljamo jednadžbu

$$\frac{4ac-b^2}{4a}=3$$

odnosno

$$\frac{4\cdot(-1)\cdot k-(-2)^2}{4\cdot(-1)}=3$$

Rješavanjem te jednadžbe konačno dobivamo k=2.

Zadatak 22

Koliko lokalnih ekstrema ima funkcija $f(x)=2x^4+6x^2+4$?

Rješenje:

Za odredivanje lokalnih ekstrema funkcije potrebno je derivirati funkciju i potom derivaciju izjednačiti s nulom te riješiti jednadžbu. Derivacija funkcije jednaka je:
$f'(x) = 8x^3 + 12x$.
Sada rješavamo jednadžbu $8x^3 + 12x = 0$. Faktorizacijom imamo:
$x \cdot (8x^2 + 12) = 0$.
Jedno rješenje stoga je $x_1 = 0$, a preostala rješenja su rješenja jednadžbe $8x^2 + 12x = 0$ tj $8x^2 = -12$, Ta jednadžba nema rješenja pa je jedini kandidat za lokalni ekstrem točka $x_1 = 0$.
Da bi provjerili je li točka $x_1 = 0$ doista lokalni ekstrem moramo pronaći drugu derivaciju funkcije i uvrstiti x=0 u drugu derivaciju.
$f''(x) = 24x^2 + 12$.
$f''(0) = 24 \cdot 0^2 + 12 = 12 > 0$,
pa je točka x=0 lokalni minimum, pa postoji samo jedan ekstrem.
(Kada bi druga derivacija u nuli bila jednaka nuli imali bi točku infleksije, pa ta točka ne bi bila ekstrem).

Zadatak 23

Kojem intervalu pripada rješenje jednadžbe $log_4(2x) - log_4(x-1) = 2$?

Rješenje:

Razlika logaritama s istom bazom jednaka je logaritmu kvocijenta. Stoga je:

$log_4(2x) - log_4(x-1) = log_4(\frac{2x}{x-1})$.

Nadalje, broj 2 možemo zapisati kao $2 = log_4(16)$, pa se naša jednadžba pretvara u:

$log_4(\frac{2x}{x-1}) = log_4(16)$. Stoga je:
$$\frac{2x}{x-1} = 16$$

i rješavanjem te jednadžbe dobijemo $x = \frac{8}{7}$. Dakle, rješenje pripada intervalu $< 1, +\infty >$.

Zadatak 24

Očekivani broj bakterija C odreden je jednadžbom $C = 100 \cdot 2^{\frac{t}{15}}$, gdje je t broj sati od početka mjerenja. Nakon koliko se sati očekuje približno 300 bakterija?

Rješenje:

Rješavamo jednadžbu $300 = 100 \cdot 2^{\frac{t}{15}}$. Imamo:

$$3 = 2^{\frac{t}{15}}$$

$$\frac{t}{15} = log_2(3)$$

$$t = log_2(3) \cdot 15 \approx 24$$

Zadatak 25

Podijelimo broj $\frac{17}{432}$ s njemu suprotnim brojem i dobivenome količniku dodamo 5. Koliko iznosi recipročna vrijednost dobivenog rezultata?

Rješenje:

$$\frac{17}{432} : \frac{-17}{432} + 5 = 4.$$

Recipročna vrijednost dobivenog rezultata jest $\frac{1}{4}$

Zadatak 26

Odredite neki dvočlani podskup skupa $\mathbb{R}\backslash < 23, 50 >$.

Rješenje:

Navedeni skup sadrži sve realne brojeve osim onih koji se nalaze izmedu 23 i 50. Navodimo bilo koji dvočlani podskup, pa je to recimo 0,1. Potrebno je pripaziti da se dvočlani podskup piše unutar vitičastih zagrada $\{\}$. Recimo, ako u odgovoru napišete 0,1 umjesto $\{0,1\}$ odgovor neće biti priznat.

Zadatak 27

Odredite kompleksni broj $\overline{z}$ ako je $z = 7 + 8i$.

Rješenje:

Da bi odredilit konjugat navedenog kompleksnog broja potrebno je samo promijeniti predznak imaginarnog dijela. Dakle:
$\overline{z} = 7 - 8i$.

Zadatak 28

Odredite opći član geometrijskog niza 1,3,9,...

Rješenje:

Formula za opći član geometrijskog niza glasi:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

pri čemu je a_1 prvi član niza, a q koeficijent s kojim množimo članove niza. Iz navedenog niza pročitamo $a_1 = 1$ i $q = 3$, pa je opći član niza:
$a_n = 1 \cdot 3^{n-1} = 3^{n-1}$

Zadatak 29.1

Izrazite c iz formule $a = \sqrt{b+2c}$.

Rješenje:

Kvadriranjem dobijemo:

$$a^2 = b + 2c$$
$$-2c = -a^2 + b$$
$$c = \frac{-a^2+b}{-2} = \frac{a^2-b}{2}$$

Zadatak 29.2

Napišite izraz $y^{\frac{3}{2}} : y^{\frac{2}{3}}$ u obliku jednoga korijena.

Rješenje:

Kada dijelimo potencije s istom bazom, eksponenti se oduzimaju. Dakle:

$$y^{\frac{3}{2}} : y^{\frac{2}{3}} = y^{\frac{3}{2}-\frac{2}{3}} = y^{\frac{5}{6}}.$$

Izraz moramo napisati pomoću jednog korijena pa je $y^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{y^5}$

Zadatak 30.1

Oka je stara mjerna jedinica za volumen za koju vrijedi 1 oka=$1.282dm^3$. Koliko oka iznosi $2.564m^3$

Rješenje:

Iz činjenice da je 1 oka=$1.282dm^3$ slijedi $1dm^3 = \dfrac{1}{1.282}$ oka. Nadalje, $1m^3$=$1000dm^3$, pa je:

$2.564m^3$=$2564dm^3$=$2564 \cdot \frac{1}{1.282}\ oka = 2000oka$

Zadatak 30.2

Ako je $M = 2.5$ i $logE = 1.18 + 1.5M$ kolika je vrijednost broja E?

Rješenje:

$$\begin{gathered} logE = 1.18 + 1.5M \\ logE = 1.18 + 1.5 \cdot 2.5 \\ logE = 4.93 \\ E = 10^{4.93} \approx 85113.8 \end{gathered}$$

Zadatak 31.1

Koliki je koeficijent uz n nakon provodenja svih operacija u izrazu $(3n-1)^2 + n(2n-1)(4n^2+2n+1)$

Rješenje:

$$(3n-1)^2 + n(2n-1)(4n^2+2n+1) =$$

$$= 9n^2 - 6n + 1 + (2n^2 - n)(4n^2 + 2n + 1) =$$

$$= 9n^2 - 6n + 1 + 8n^4 + 4n^3 + 2n^2 - 4n^3 - 2n^2 - n =$$

$$= 8n^4 + 9n^2 - 7n + 1$$

Koeficijent uz n jednak je -7.

Zadatak 31.2

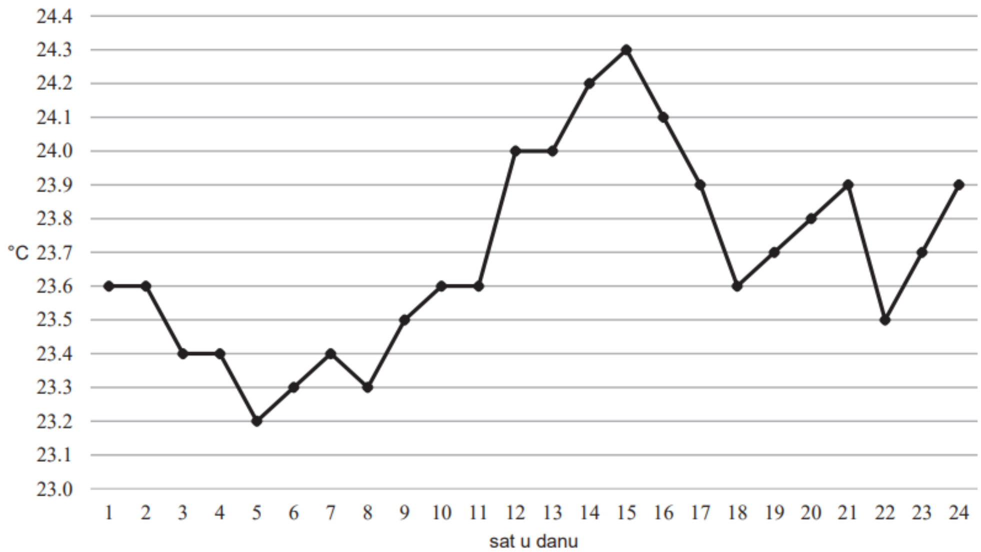
Zapišite izraz $a^2 - 2ab - 3b^2$ u obliku umnoška.

Rješenje:

$$a^2 - 2ab - 3b^2 = a^2 + ab - 3ab - 3b^2 = a(a+b) - 3b(a+b) = (a-3b)(a+b)$$

Zadatak 32

Linijski dijagram prikazuje temperaturu površine mora tijekom jednog dana u kolovozu.



Zadatak 32.1

Koja je razlika izmedu najviše i najniže izmjerene temperature površine mora tijekom tog dana?

Rješenje:

Iz grafa čitamo da je najviša zabilježena temperatura 24.3° i najniža 23.2°. Njihova razlika je 1.1°

Zadatak 32.2

Kolika je prosječna vrijednost pet najviših izmjerenih temperatura toga dana?

Rješenje:

Iz grafa vidimo da je pet najvećih zabilježenih temperatura: 24.3, 24.2, 24,1, 24.0, 24.0.

Njihov prosjek je $\dfrac{24.3 + 24.2 + 24.1 + 24 + 24}{5} = 24.12^\circ$

Zadatak 33.1

U školi s 855 učenika omjer broja učenika nižih i viših razreda jest $10 : 9$. Koliko je djevojčica u višim razredima ako je omjer dječaka i djevojčica u višim razredima $7 : 8$?

Rješenje:

Prvo izračunajmo broj učenika viših razreda. Budući da je omjer učenika viših i nižih razreda jednak 10:9, slijedi da je broj učenika nižih razreda $10k$ i viših razreda $9k$ pri čemu moramo odrediti broj k. Ukupan broj učenika je 855 pa slijedi:
$10k + 9k = 855 \Rightarrow k = 45$.
Dakle, broj učenika viših razreda je $9k = 9 \cdot 45 = 405$. Sada istim postupkom odredimo broj djevojčica, ali je sada ukupan broj učenika 405. Dakle, imamo:
$7k + 8k = 405 \Rightarrow k = 27$, pa je djevojčica $8k = 8 \cdot 27 = 216$

Zadarak 33.2

Mateo planira kupiti trenirku i tenisice. Ukupna cijena obaju proizvoda trenutačno iznosi 2208 kuna, a cijena tenisica za 40 % veća je od cijene trenirke. Sljedećega tjedna očekuje se popust na cijenu tenisica od 20 %. Kolika će tada biti ukupna cijena obaju proizvoda?

Rješenje:

Označimo sa x cijenu trenirke i sa y cijenu tenisica. Ukupna cijena oba proizvoda je 2208 iz čega dobivamo prvu jednadžbu:
$x + y = 2208$.
Nadalje, cijena tenisica je za 40% veća od cijene trenirke, pa imamo drugu jednadžbu:
$x + \dfrac{40}{100}x = y$ (Cijenu trenirke uvećamo za 40 posto cijene).
Dobivamo sustav od vije jednadžbe s dvije nepoznanice.

$$x + y = 2208$$
$$1.4x = y.$$

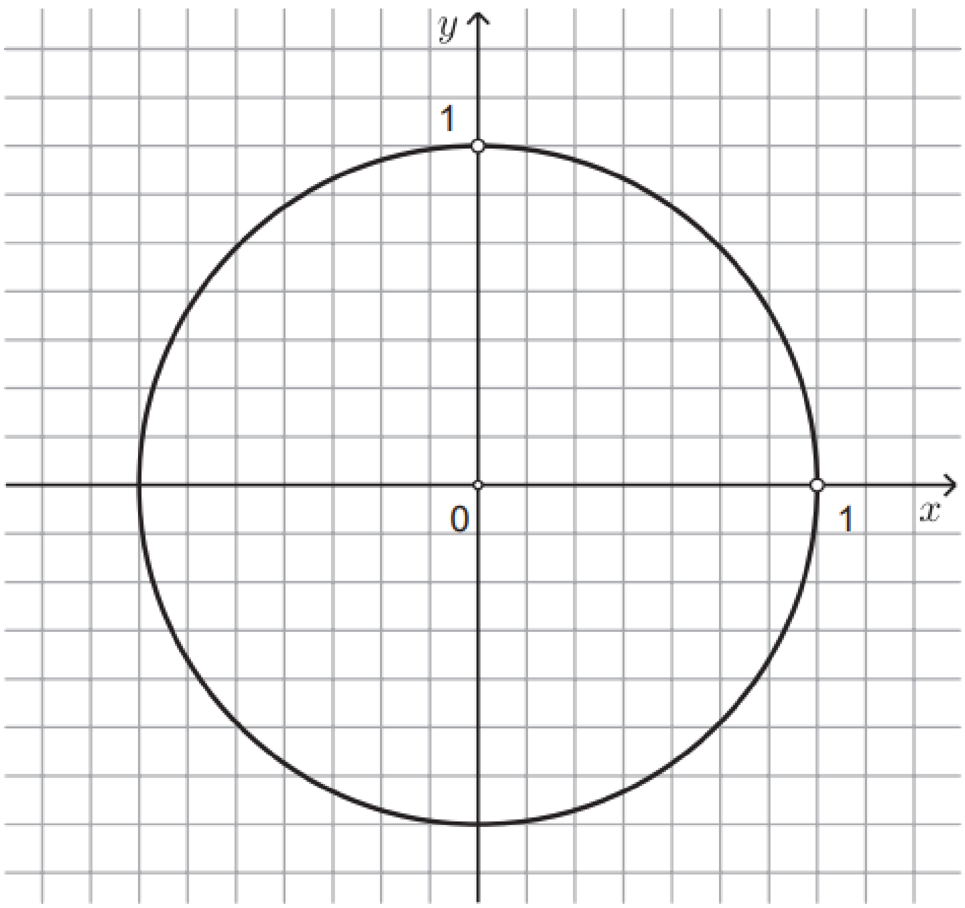
y iz druge jednadžbe uvrstimo u prvu, pa imamo

$$x + 1.4x = 2208 \Rightarrow x = 920$$
$$y = 1.4x = 1.4 \cdot 920 = 1288.$$

Dobili smo da je cijena trenirke 920kn i cijena tenisica 1288 kn. Saznajmo još cijenu tenisica nakon popusta od 20%. Ona iznosi:
$1288 - \frac{20}{100} \cdot 1288 = 1030.4$ kn.
Stoga će nakon pojeftinjenja tenisica ukupna cijena obaju proizvoda biti 1030.4+920=1950.4 kn.

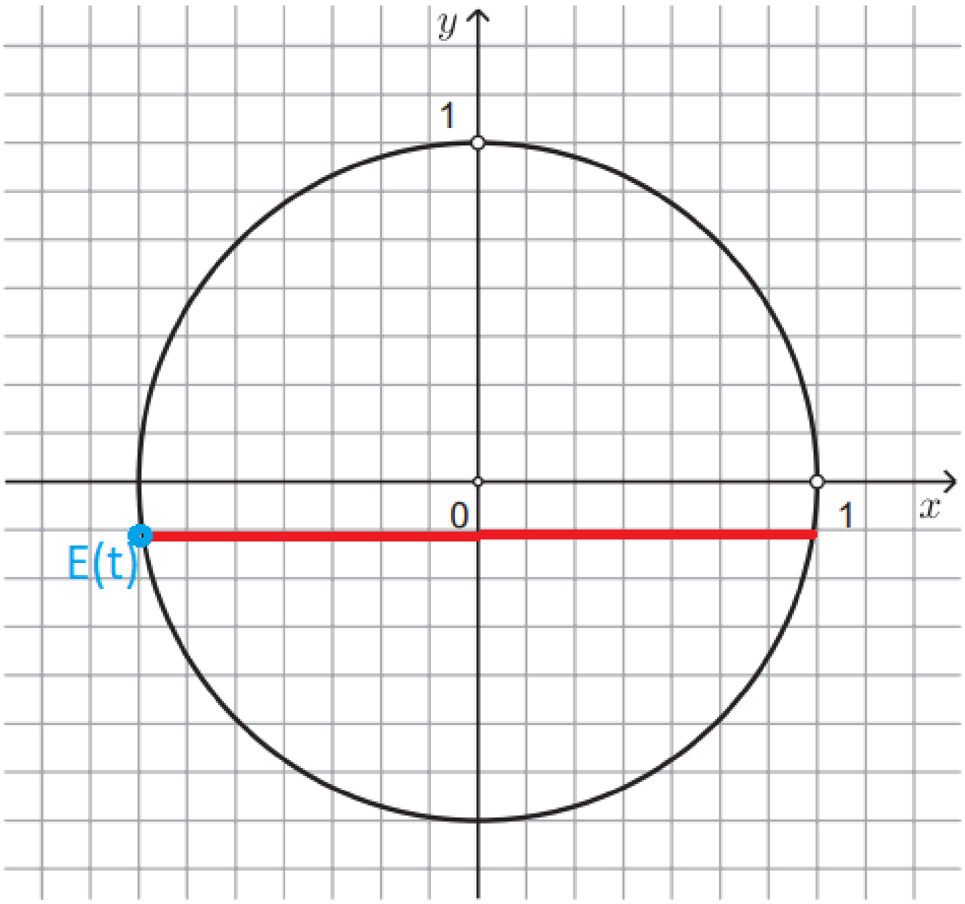
Zadatak 34.1

Na brojevnoj kružnici prikažite točku E(t) za koju vrijedi $sint = \frac{-1}{7}$ i $cost < 0$



Rješenje:

Označimo točke na brojevnoj kružnici čiji je sinus jednak $\frac{-1}{7}$. Dobivamo dvije različite točke. Medutim odabrat ćemo onu kojoj je kosinus negativan



Zadatak 34.2

Koja su rješenja jednadžbe $\sin{(2x - \frac{3\pi}{4})} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ iz intervala $[0,\pi]$.

Rješenje:

Vrijedi da je $sin(\frac{\pi}{4}) = sin(\frac{3\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Sva rješenja jednadžbe $sinx = \frac{\sqrt{2}}{2}$ su dana sa

$x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ i
$x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Stoga rješavamo jednadžbu

$$2x - \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ i}$$

$$2x - \frac{3\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Medutim, moramo odabrati samo ona rješenja za koja je $x \in [0, \pi]$. Jedina takva rješenja su kada je k=0, to jest kada je

$$2x - \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$$
$$2x - \frac{3\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4}$$

Dakle, jedina dva rješenja su $x_1 = \frac{\pi}{2}$ i $x_2 = \frac{3\pi}{4}$

Zadatak 35.1

Pravci $ax - 2y + 5 = 0$ i $y = 5x + 4$ su usporedni. Kolika je vrijednost parametra a?

Rješenje:

Pravci su usporedni ako su im koeficijenti smjera isti. Koeficijent smjera čitamo iz eksplicitne jednadžbe pravca $y = kx + l$. Dakle, moramo jednadžbu prvog pravca dovesti do eksplicitnog oblika. Imamo:

$$ax - 2y + 5 = 0$$

$$-2y = -ax - 5$$

$$y = \frac{a}{2}x + \frac{5}{2}.$$

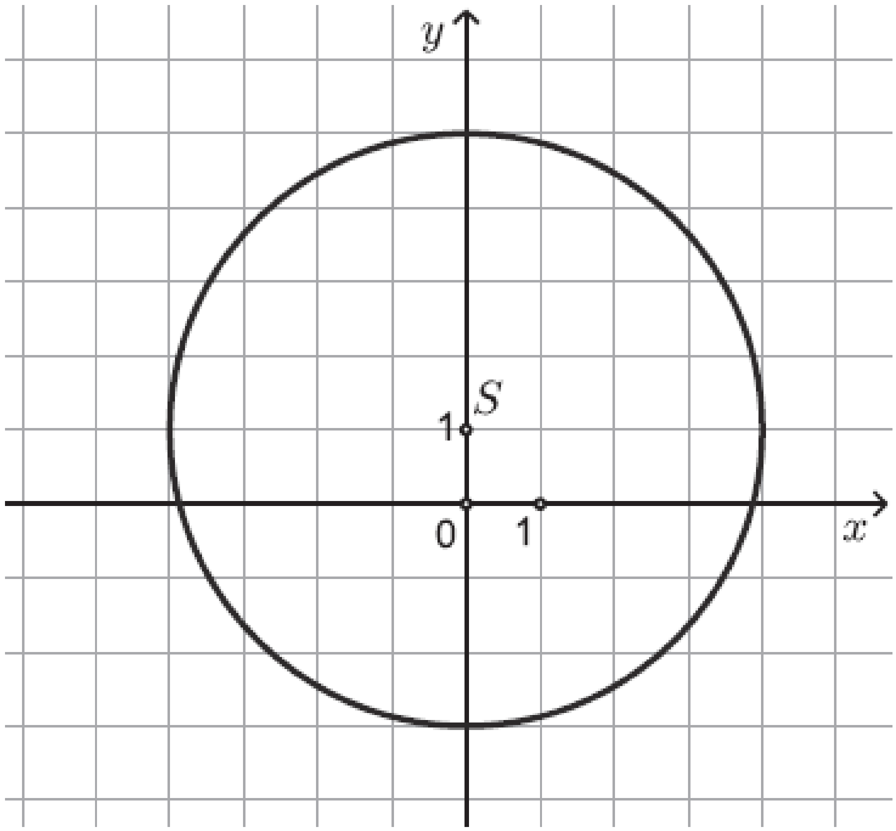
Stoga je

$$\frac{a}{2} = 5$$

$$a = 10$$

Zadatak 35.2

Koja je jednadžba prikazane kružnice



.

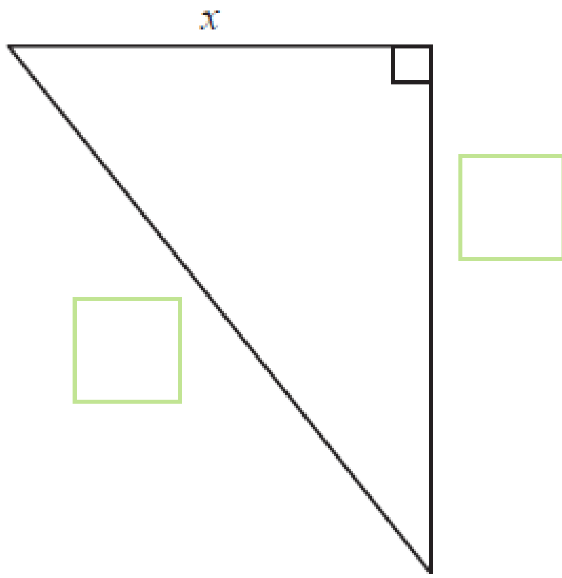
Rješenje:

Jednadžba kružnice sa središtem u (x_1, y_1) radijusa r dana je sa: $(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = r^2$. Iz slike vidimo da je središte kružnice točka $(0, 1)$ i radijus $r = 4$, pa je tražena jednadžba

$$x^2 + (y - 1)^2 = 16$$

Zadatak 36.1

Duljine su stranica pravokutnoga trokuta x, y, z i vrijedi $x^2 - y^2 = z^2$. U prazne kvadratiće na skici upišite duljine stranica koje nedostaju.



.

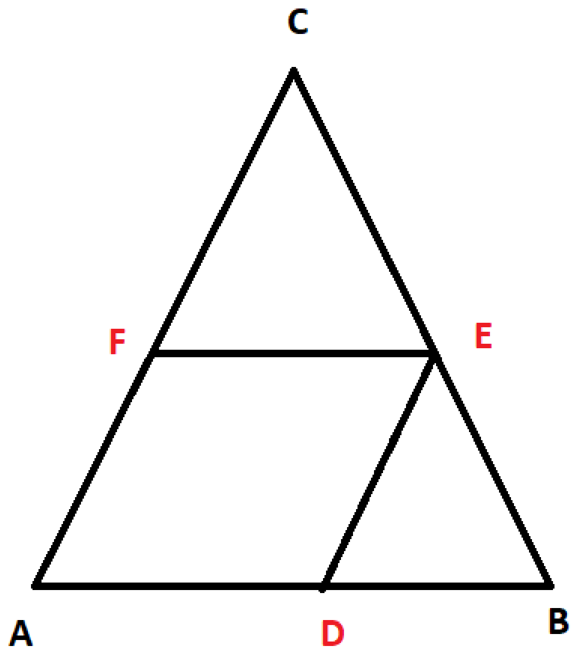
Rješenje:

Iz jednadžbe $x^2 = y^2 - z^2$ slijedi $x^2 + z^2 = y^2$. Prema Pitagorinom poučku vrijedi da je zbroj kvadrata duljina kateta jednak kvadratu duljine hipotenuze. Prema tome, u zadanom trokutu x i z su katete, a y je hipotenuza, pa je to potrebno naznačiti na slici.

Zadatak 36.2

U trokutu ABC upisan je romb tako da je jedan njegov vrh u vrhu A trokuta, a dvije stranice nalaze se na stranicama $\overline{AB}$, $\overline{AC}$.Kolika je duljina stranice romba ako su duljine stranice trokuta $|BC| = 7.5cm$, $|AC| = 7.5cm$, $|AB| = 7.5cm$

Rješenje:



Označimo sa D,E,F vrhove romba kao na slici. Označimo duljinu njegove stranice s x (Romb ima sve stranice jednake duljine). Promotrimo trokute $\triangle BED$ i $\triangle ABC$ Ti su trokuti slični, pa vrijedi

$$\frac{|BD|}{|DE|} = \frac{|AB|}{|AC|}$$

$$\frac{15 - a}{a} = \frac{15}{10}$$

$$150 - 10a = 15a \Rightarrow a = 6$$

Zadatak 37.1

Odredite sliku funkcije $f(x) = 7\cos(4x)$

Rješenje:

Slika funkcije nam predstavlja sve vrijednosti koje funkcija može poprimiti. Vrijednosti koje poprima kosinus su $[-1, 1]$. Stoga je slika zadane funkcije $[-7, 7]$

Zadatak 37.2

Odredite derivaciju funkcije $f(x) = 5x(3 - x)$.

Rješenje:

Vrijedi:

$$f(x) = 5x(3 - x)$$

$$f(x) = 15x - 5x^2$$

Koristimo pravila za deriviranje, pa dobijamo:

$$f'(x) = 15 - 5 \cdot 2 \cdot x^{2-1},$$

$$f'(x) = 15 - 10x$$

Zadatak 38.1

Zadana je funkcija $f(x) = x - \sqrt{9 + (x + 7) \cdot \sqrt{x(x + 2) + 1}}$. Koliko je $f(2^{1500})$?

Rješenje:

Prvo pokušajmo srediti izraz s kojim je definirana funkcija. Imamo:

$$f(x) = x - \sqrt{9 + (x + 7) \cdot \sqrt{x(x + 2) + 1}}$$

$$f(x) = x - \sqrt{9 + (x + 7) \cdot \sqrt{x^2 + 2x + 1}}$$

$$f(x) = x - \sqrt{9 + (x + 7) \cdot \sqrt{(x + 1)^2}}$$

Sada trebamo biti oprezni, Uočimo ne vrijedi $\sqrt{x^2} = x$. Primjerice za x=-2 imamo $\sqrt{(-2)^2} = 2 \neq -2$. Općenito, vrijedi $\sqrt{x^2} = |x|$. Dakle,

$$f(x) = x - \sqrt{9 + (x + 7) \cdot |x + 1|}$$

Budući da je $x = 2^{1500}$ vrijedi $|x + 1| = x + 1$, pa imamo:

$$f(x) = x - \sqrt{9 + (x+7)(x+1)}$$

$$f(x) = x - \sqrt{9 + x^2 + x + 7x + 7}$$

$$f(x) = x - \sqrt{9 + x^2 + 8x + 7}$$

$$f(x) = x - \sqrt{x^2 + 8x + 16}$$

$$f(x) = x - \sqrt{(x+4)^2}.$$

Sada opet koristimo isti argument, pa konačno imamo:

$$f(x) = x - (x+4) = -4$$

Dakle, f je konstantna funkcija koja poprima vrijednost -4 za svaki argument x, pa je i $f(2^{1500}) = -4$.

Zadatak 38.2

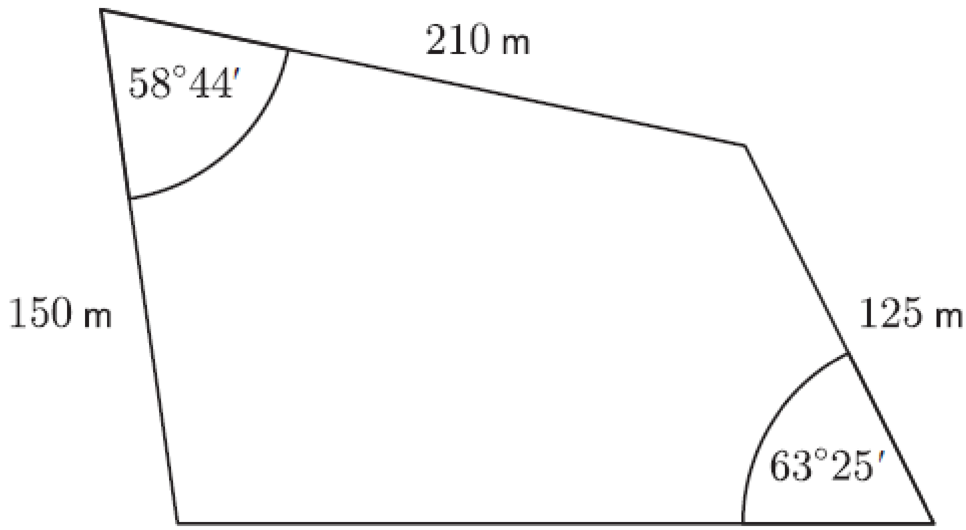
Jakov je slagao kockice različitih veličina jednu na drugu od najveće do najmanje. Duljina je brida najveće kockice 6.5 cm. Svakoj sljedećoj kockici brid je za $0.5cm$ kraći od brida prethodne kockice. Volumen je najmanje kockice $0.125cm^3$. Koliko je kockica Jakov ukupno složio?

Rješenje:

Volumen najmanje kockice je $0.125cm^3$. Volumen kocke duljine stranice a iznosi a^3. Stoga, ako duljinu stranice najmanje kockice označimo s a imamo $a^3 = 0.125cm^3 \Rightarrow a = 05.cm$.
Dakle, Jakov slaže kockice počevši od prve duljine stranice $6.5cm$ do zadnje duljine stranice $0.5cm$, pri čemu je duljina brida sljedeće za $0.5cm$ manje od prethodne. Zaključujemo da su duljine bridova kockica jednake redom $6.5, 6, 5.5, 5, 4.5, 4, 3.5, 3, 2.5, 2, 1.5, 1, 0.5$, odnosno složio je ukupno 13 kockica

Zadatak 39.1

Kolika je površina četverokuta prikazanog na skici?



.

Rješenje:

Odredimo za početak duljinu dijagonale. Prema poučku o kosinusu vrijedi

$$d^2 = 210^2 + 150^2 - 2 \cdot 210 \cdot 150 \cdot \cos 58°33'$$

$$d^2 = 33901.62$$

$$d = 184.12m$$

Odredimo nepoznatu stranicu četverokuta opet preko poučka o kosinusu, pri čemo nepoznatu stranicu označavamo s b. Vrijedi:

$$(184.12)^2 = 125^2 + b^2 - 2 \cdot 125 \cdot b \cdot \cos 63°25'.$$

$$b^2 - 111.87b - 18275 = 0$$

$$b_1 = 202.24 \text{ i } b_2 = -90.37$$

Negativno rješenje možemo zanemariti jer duljina stranice ne može biti negativna. Sada podijelimo površinu četverokuta na površinu dva trokuta odredenih dijagonalama. Jedna od formula za površinu trokuta je $P = \frac{1}{2}ab \cdot \sin\gamma$. Stoga je

$$P_1 = \frac{1}{2} \cdot 150 \cdot 210 \cdot \sin 58°44' = 13462.48$$

$$P_2 = \frac{1}{2} \cdot 125 \cdot 202.24 \cdot \sin 63°25' = 11303.76$$

Ukupna površina iznosi:

$$P_1 + P_2 = 13462.48 + 11303.76 = 24766.24m^2$$

Zadatak 39.2

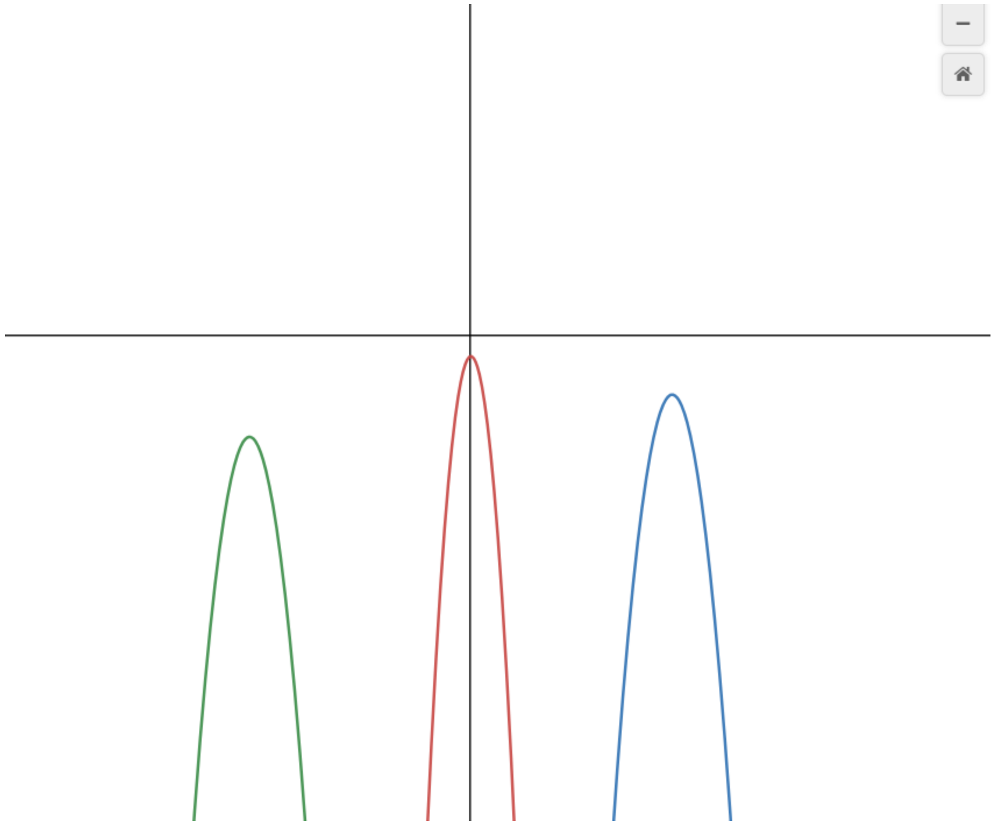
Za koje su sve realne brojeve k vrijednosti funkcije $f(x) = k(x^2 + 1) - 3x(x + 1)$ uvijek negativne?

Rješenje:

Za početak sredimo malo izraz kojim je definirana funkcija. Imamo:

$$f(x) = kx^2 + k - 3x^2 - 3x = (k - 3)x^2 - 3x + k+$$

Ova funkcija je kvadratna s koeficijentima a=k-3,b=-3 i c=k. Promotrimo sada općenito što vrijedi za kvadratne funkcije koje poprimaju samo negativne vrijednosti.



. Ono što im je zajedničko je da moraju imati vodeći koeficijent a negativan. inače sigurno neće biti cijele ispod x osi, te im tjeme mora biti ispod y osi, odnosno druga koordiata tjemena mora biti manja od 0. Zapišimo to nejednadžbama:

$$k - 3 < 0$$

$$\frac{4 \cdot (k-3)k - (-3)^2}{4(k-3)} < 0$$

(Formula za drugu koordinatu tjemena)

Iz prve jednadžbe dobivamo $k < 3$. Budući da rješavamo sustav nejednadžbi, a iz prve nejdnadžbe slijedi da je $k + 3 < 0$ imamo da je $4(k+3) < 0$.
Stoga iz druge nejednadže slijedi da brojnik mora biti veći od 0 (Razlomak je negativan ako su brojnik i nazivnik suprotnih predznaka, a znamo da je nazivnik negativan). Slijedi:

$$4 \cdot (k-3)k - 3^2 > 0$$

$$4(k^2 - 3k) - 9 > 0$$

$$4k^2 - 12k - 9 > 0$$

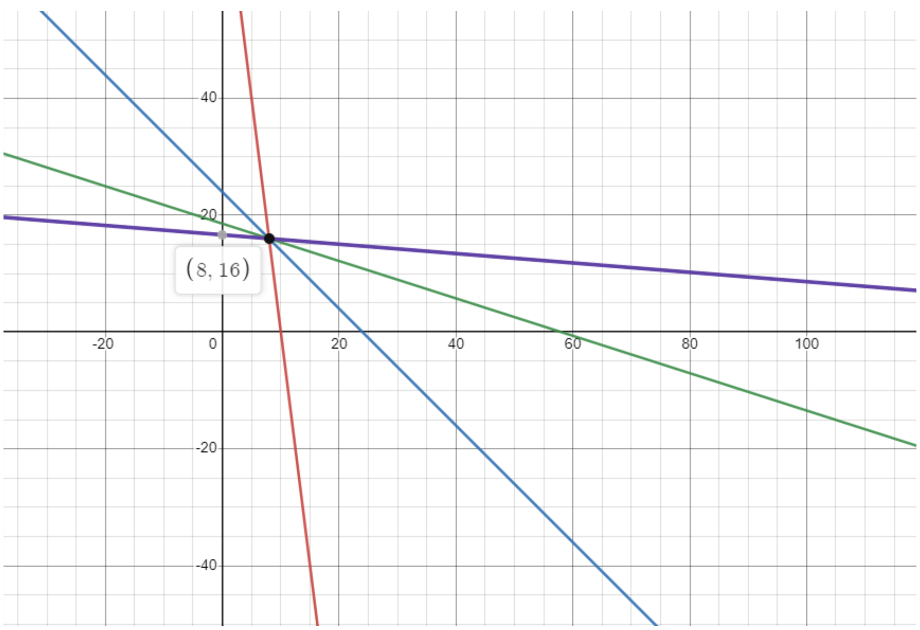
Da bi odredili rješenja ove kvadratne nejednadžbe odredimo rješenja kvadratne jednadžbe $4k^2 - 12k - 9 = 0$. Rješenja te jednadžbe su:
$k_1 = \dfrac{3+3\sqrt{2}}{2}$ i $k_2 = \dfrac{3-3\sqrt{2}}{2}$.
Budući da je parabola $4k^2 - 12k - 9$ okrenuta "prema gore" rješenja nejednadžbe su $< -\infty, \dfrac{3-3\sqrt{2}}{2} > \cup < \dfrac{3+3\sqrt{2}}{2}, +\infty >$. Konačno, presjecimo rješenja prve i druge nejednadžbe, i dobivamo:
$(< -\infty, \dfrac{3-3\sqrt{2}}{2} > \cup < \dfrac{3+3\sqrt{2}}{2}, +\infty >) \cap (< -\infty, 3 >)$
$= < -\infty, \dfrac{3-3\sqrt{2}}{2} >$

Zadatak 40

Pravac prolazi točkom T (8,16)i s pozitivnim dijelovima koordinatnih osi odreduje trokut maksimalne moguće površine. Kolika je mjera kuta koji pravac zatvara s osi ordinata?

Rješenje:

Promotrimo pravce koji prolaze kroz točku (8,16).



.

Uočimo da se površine trokutova povećavaju kako se koeficijenti pravaca približavaju 0, pa ne postoji trokut maksimalne moguće površine. Pretpostavljamo da je ovo greška NCVVO-a, pa ćemo riješiti zadatak gdje tražimo trokut najmanje moguće površine. Označimo s a odsječak pravca na x-osi i s b odsječak pravca na y-osi. Jednadžba pravca glasi $y = kx + l$. Odsječak na y-osi ima koordinate (0,b), a odsječak na x-osi (a,0). Stoga je

$$b = l \text{ i } 0 = k \cdot a + b \Rightarrow b = -k \cdot a$$

Pravci $y = kx + l$ prolaze točkom (8,16) pa imamo

$$16 = 8k + l \Rightarrow 16 = 8k + b \Rightarrow k = \frac{16 - b}{8}.$$

Uvrštavanjem k u prvu jednadžbu imamo

$$b = -\frac{16 - b}{8} \cdot a$$

$$a = \frac{8b}{b - 16}.$$

Trokuti koje zatvaraju pravci su pravokutni, i formula za njihovu površinu je $P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b$, odnosno
$P = \frac{1}{2} \cdot \frac{8b}{b-16} \cdot b = \frac{1}{2} \cdot \frac{8b^2}{b-16} = \frac{4b^2}{b-16}.$
Površinu možemo shvatiti kao funkciju od b, $P(b) = \frac{4b^2}{b-16}.$
Da bi pronašli minimalnu površinu, potrebno je derivirati funkciju P i pronaći nultočke derivacije. Vrijedi

$$P'(b) = \frac{8b(b-16) - 1(4b^2)}{(b-16)^2} = \frac{4b^2 - 128b}{(b-16)^2}.$$

Izjednačavanjem $P'(b) = 0$ slijedi $4b^2 - 128b = 0 \Rightarrow 4b(b - 32) = 0$

$$b_1 = 0 b_2 = 32$$

Rješenje $b_1 = 0$ možemo zanemariti jer ako je odsječak na osi y jednak 0 onda ne postoji trokut. Dakle, jedina nultočka derivacije je $b = 32$.
Tada je $a = \frac{8b}{b-16} = \frac{8 \cdot 32}{32 - 16} = 16.$

. Pokažimo još da funkcija P doista postiže minimum za b=32.
Vrijedi $P'(31) = -0.55 < 0$ i $P'(33) = 0.46 > 0$.
Taj račun nam ukazuje da je funkcija padajuća do točke b=32 i rastuća od točke b=32, pa u točki b=32 mora poprimiti lokalni minimum.

Imamo

$$k = \frac{16-b}{8} = \frac{16-32}{8} = -2$$

$$l = b = 32.$$

Iz navedenog slijedi da je jednadžba traženog pravca $y = -2x + 32$.
Odredimo još kut koji pravac zatvara s osi oordinata . Promatramo pravokutan trokut s duljinama stranica b=32, a=16. Označimo traženi kut s α. Tada je:

$$tg\alpha = \frac{16}{32}$$

$$\alpha = tg^{-1}(\frac{1}{2}) = 26°34'$$