A RAZINA LJETNI ROK 2022. RJEŠENJA

univ.bacc.math Robert Tadić

Zadatak 1

Kolika je vrijednost broja $33 \cdot \dfrac{\sin 32^\circ}{\sin 57^\circ}$

Rješenje:

Unesimo traženi izraz u kalkulator i pripazimo da je kalkulator namješten na stupnjeve a ne na radijane. Dobivamo rješenje 27.8017.

Zadatak 2

Koliko je 20 litara izraženo u m^3?

Rješenje:

1 litra iznosi $1dm^3$. Pretvorimo dm^3 u m^3. Imamo $1dm = 0.1m$, pa je $1dm^3 = (0.1)^3 m^3 = 0.001m^3$. Stoga je 20 litara$=20 \cdot 0.001m^3 = 0.02m^3$

Zadatak 3

Koji je od navedenih brojeva jednak broju $\dfrac{9^{-2} \cdot 243^a}{3^a}$ za svaki realni broj a?

Rješenje:

Želimo pojednostavniti traženi izraz. Želimo sve faktore napisati u obliku potencija s istom bazom i korisiti pravila za množenje i dijeljenje potencija s istom bazom. Imamo:

$$\begin{aligned}
&\frac{9^{-2} \cdot 243^a}{3^a} = \\
&= \frac{(3^2)^{-2} \cdot (3^5)^a}{3^a} = \\
&= \frac{3^{-4} \cdot 3^{5a}}{3^a} = \\
&= 3^{-4+5a-a} = 3^{-4+4a} = (3^4)^{-1+a} = 81^{a-1}
\end{aligned}$$

Zadatak 4

Čemu je jednak brojnik do kraja skraćenog razlomka $\frac{(2y-1)^2+8y}{4y^2-1}$ za sve y za koje je definiran?

Rješenje:

Pojednostavnimo zadani izraz. Imamo:

$$\begin{aligned}
&\frac{(2y-1)^2+8y}{4y^2-1} = \frac{4y^2-4y+1+8y}{4y^2-1} = \\
&= \frac{4y^2+4y+1}{4y^2-1} = \frac{(2y+1)^2}{(2y-1)(2y+1)} = \\
&= \frac{2y+1}{2y-1}.
\end{aligned}$$

Dakle, brojnik je jednak $2y+1$.

Zadatak 5

Prosječni je promjer čestice vriusa približno $0.12\mu m$.Njegov promjer odgovara otprilike tisućitom dijelu promjera ljudske dlake. Koliki je promjer ljudske dlake prema tim podacima izražen u metrima?

Rješenje:

Jedan μm iznosi $10^{-6}m$, što implicira da je promjer virusa $0.12 \cdot 10^{-6}$. Promjer ljudske dlake je prema zadatku tisuću puta veći od promjera virusa, pa je promjer ljudske dlake $1000 \cdot 0.12 \cdot 10^{-6}m = 1.2 \cdot 10^{-4}m$.

Zadatak 6

Funkcijom $h(t) = 100 - 4t$ procjenjuje se broj sati h potrebnih da se mlijeko ukiseli na temperaturi t izraženoj u $^{\circ}C$.Koje je značenje broja 4 u zapisu funkcije h?

Rješenje:

Iz definicije funkcije h možemo odrediti koliko je sati potrebno da se mlijeko ukiseli na temperaturi od $0^{\circ}C$. Uvrstimo t=0 i imamo $h(0) = 100 - 4 \cdot 0 = 100$, pa je potrebno 100 sati da se mlijeko ukiseli ako je temperatura $0^{\circ}C$. Analogno možemo izračunati da ako je temperatura $1^{\circ}C$ da je tada mlijeku potrebno 96 sati da se ukiseli. Stoga, ako povećamo temperaturu za 1 stupanj, mlijeko će se ukiseliti 4 sata ranije.

Zadatak 7

Marko se zaposlio u voćnjaku gdje je plaćen po satu ovisno o poslu koji obavlja. Prvoga je dana za 3 sata košnje voćnjaka i 4 sata branja jabuka plaćen 180 kuna, a drugoga dana za 2 sata košnje voćnjaka i 6 sati branja jabuka 220 kuna. Koji je posao više plaćen i za koliko?

Rješenje:

Označimo plaćeni za jedan sat košnje voćnjaka s x i jedan sat branja jabuka s y. Prvi dan Marko je 3 sata kosio voćnjak i 4 sata brao jabuke i ukupno je plaćen 180 kn. Stoga je prva jednadžba

$$3x + 4y = 180.$$

Slično, iz podataka o poslu koji je obavio drugog dana imamo:

$$2x + 6y = 220$$

Dobili smo sustav od dvije jednadžbe s dvije nepoznanice. Pomnožimo prvu jednadžbu s 2 i drugu s -3 pa imamo:

$$6x + 8y = 360$$

$$-6x - 18y = -660$$

Zbrajanjem te dvije jednadžbe imamo:

$$-10y = -300 \Rightarrow y = 30.$$

Uvrstimo sada dobiveni y u prvu jednadžbu, pa imamo:

$$3x + 4 \cdot 30 = 180$$

$$3x = 60 \Rightarrow x = 20$$

Dakle, više je plaćen za branje jabuka i to za 10kn više nego za košnju voćnjaka.

Zadatak 8

Katja je uštedjela odredeni iznos novca u kunama. Majka joj je dala dvostruko više od uštedenoga iznosa, a otac je dodao još 500 kuna. Koliko je kuna Katja imala uštedeno ako je na kraju imala više od peterostruke vrijednosti iznosa koji je uštedjela na početku?

Rješenje:

Označimo iznos koji je Katja uštedjela nepoznanicom x. Majka joj je dala dvostruko više od uštedenog, dakle majka joj je dala $2x$. Otac joj je dodao još 500 kuna, pa Katja ukupno ima $x+2x+500 = 3x+500$ kuna. Ako znamo da je na kraju imala više od peterostruke vrijednosti iznosa koji je uštedjela, imamo nejednadžbu:

$$3x + 500 > 5x$$

$-2x < -500 \cdot (-1)$ (predznak se u nejednadžbi okreće kada množimo negativnim brojem)

$$x < 250$$

Dakle, Katja je na početku uštedjela manje od 250 kuna.

Zadatak 9

Očekivana količina prodanih proizvoda $y = 160 + 10 \log_2 200x + 1$ ovisi o iznosu novca x u kunama uloženom za reklamiranje toga proizvoda. Koliko kuna treba uložiti u reklamiranje toga proizvoda da bi se prodalo 160 proizvoda?

Rješenje:

U zadanom izrazu y predstavlja očekivanu količinu prodanih proizvoda i x predstavlja uložene novce. Ako očekivamo prodati 160 proizvoda onda je $y = 160$. Dakle, imamo

$$160 = 160 + 10 \log_2 200x + 1$$

$$10 \log_2 200x + 1 = 0$$

$$log_2 200x + 1 = 0$$

$$200x + 1 = 2^0$$

$$200x + 1 = 0 \Rightarrow x = 0$$

Dakle, trebamo uložiti 0 kuna.

Zadatak 10

U kojemu se intervalu nalazi rješenje jednadžbe $8 \cdot 100^{x+2} = 0.008$

Rješenje:

Ova jednadžba je eksponencijalna i prvi korak u rješavanju ovakvih jednadžbi je pokušati napisati izraze kao potencije s istom bazom. Imamo:

$$8 \cdot (10^2)^{x+2} = 8 \cdot 10^{-3}$$

$$10^{2x+4} = 10^{-3}$$

$$2x + 4 = -3 \Rightarrow x = -3.5$$

Stoga ovo rješenje pripada intervalu $< -\infty, -3 >$

Zadatak 11

Znamo da se lozinka sastoji od pet jednakih znamenaka. Kolika je vjerojatnost da pogodimo lozinku iz prvoga pokušaja?

Rješenje:

Vjerojatnost je definirana kao $\frac{\text{broj povoljnih dogadaja}}{\text{Broj ukupnih dogadaja}}$. Broj povoljnih dogadaja je broj nacina na koji mozemo pogoditi lozinku, a to je samo jedan. Broj ukupnih dogadaja je broj svih mogućih lozinki s 5 jednakih znamenki. Takvih je ukupno 10 (00000,11111,22222,....,99999). Dakle, vjerojatnost traženog dogadaja jest $\frac{1}{10} = 0.1$

Zadatak 12

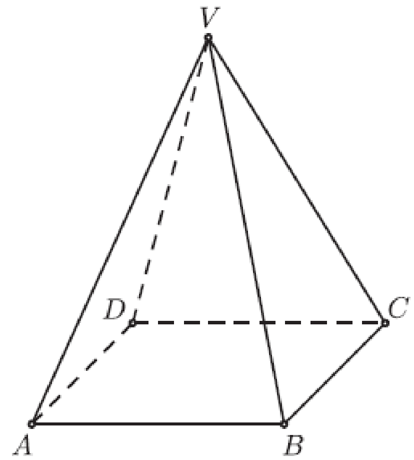
Čemu je jednaka duljina polumjera kružnice opisane trokutu?

Rješenje:

Središte trokutu opisane kružnice leži u sjecištu simetrala njegovih stranica. Stoga je polumjer trokutu opisane kružnice jednak udaljenosti sjecišta simetrala stranica do vrha trokuta.

Zadatak 13

U kojem su odnosu pravci koji sadrže bridove BC I VD piramibe ABCDV sa slike?



Rješenje:

Zadani pravci su očito mimosmjerni.

Zadatak 14

Kojemu pravcu pripadaju točke $A(1,1)$ i $B(0,-3)$?

Rješenje:

Koristimo formulu za jednadžbu pravca kroz dvije točke

$$y - y_1 = k \cdot (x - x_1)\ ,\ k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

pri čemu je $(x_1, y_1) = (1,1)$ i $(x_2, y_2) = (0,-3)$ Imamo:

$$k = \frac{-3-1}{0-1} = 4, \text{ pa onda i}$$

$$y - 1 = 4(x-1) \Rightarrow y = 4x - 3$$

Zadatak 15

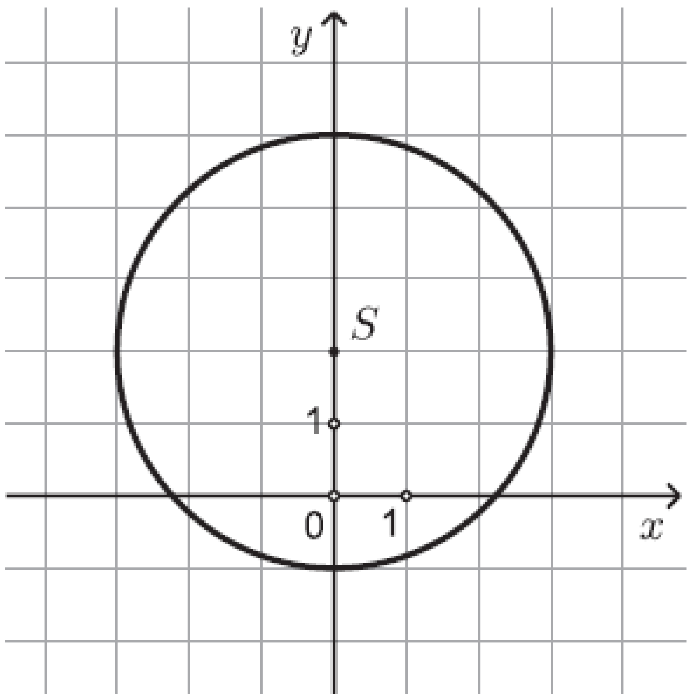
Zadani su vektori $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j}$, $\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j}$, $\vec{c} = -3\vec{i} + 4\vec{j}$. Kolika je vrijednost parametra k ako vrijedi $\vec{a} + k\vec{b} = \vec{c}$?

Rješenje:

Vrijedi $\overrightarrow{a} + k\overrightarrow{b} = (1+2k)\overrightarrow{i} + (2-k)\overrightarrow{j} = -3\overrightarrow{i} + 4\overrightarrow{j}$. Stoga: $1 + 2k = -3$ i $2 - k = 4$, iz čega slijedi $k = -2$.

Zadatak 16

Koja je jednadžba prikazane kružnice?



Rješenje:

Jednadžba kružnice sa središtem $S(x_1, y_1)$ radijusa r glasi:

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = r^2$$

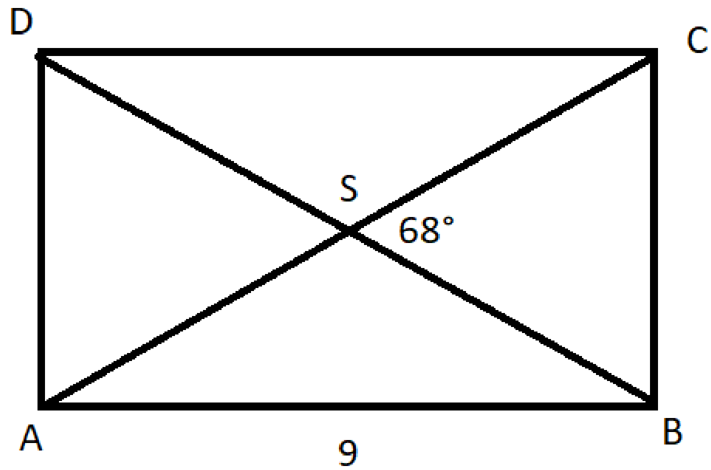
Iz slike vidimo da su koordinate središta $S(0, 2)$ i $r = 3$. Dakle, jednadžba prikazane kružnice je

$$x^2 + (y - 2)^2 = 9$$

Zadatak 17

Duljina jedne stranice pravokutnika iznosi 9 cm, a druga se iz sjecišta dijagonala vidi pod kutom od 68°. Kolika je duljina druge stranice pravokutnika?

Rješenje:



Označimo vrhove pravokutnika i sjecište dijagonala kao na slici. Uočimo da je $\angle ASB = 180° - 68° = 112°$.
Trokut $\triangle ASB$ je jednakokračan, pa su kutovi u vrhovima A i B jednaki. Označimo taj kut s α. Budući da je suma kutova u trokutu 180° imamo $2\alpha + 112° = 180°$, to jest $\alpha = 34°$ Sada, prema poučku o sinusu vrijedi:

$$\frac{9}{\sin 112°} = \frac{|AS|}{\sin 34°}$$

$$|AS| = \frac{9}{\sin 112°} \cdot \sin 34° = 5.42798.$$

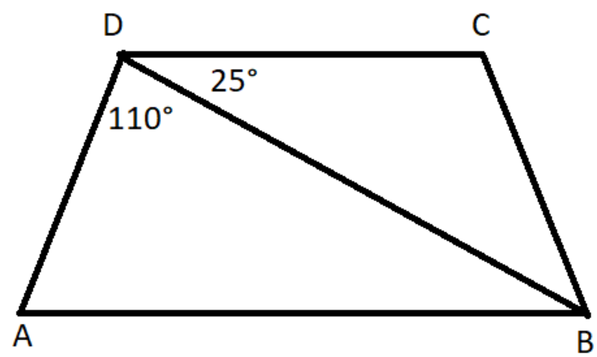
Sada, budući da je $|AC| = 2|AS| = 10.85596$, iz Pitagorinog poučka slijedi:

$$10.85596^2 = 9^2 + |BC|^2 \Rightarrow |BC| = 6.07$$

Zadatak 18

Dijagonala jednakokračnoga trapeza duljine $15cm$ dijeli unutarnji kut trapeza na dijelove mjera $25°$ i $110°$. Kolika je duljina kraka trapeza?

Rješenje:



Kut u vrhu D trapeza iznosi $135°$. Stoga je kut u vrhu A jednak $180° - 135° = 45°$. Sada u trokutu $\triangle ABD$ znamo dva kuta, pa možemo izračunati i kut $\angle ABD = 25°$. Sada koristimo poučak o sinusu. Označimo duljinu kraka trapeza s b. Imamo:

$$\frac{15}{\sin 45°} = \frac{b}{\sin 25°}$$

$$b = \frac{15}{\sin 45°} \cdot \sin 25° = 8.97$$

Zadatak 19

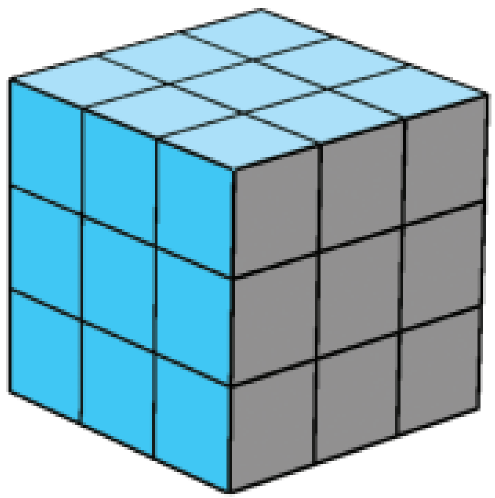
Koliki je volumen valjka kojemu je opseg baze $6\pi cm$, a polumjer jednak visini.

Rješenje:

Volumen valjka jednak je $V = B \cdot v$, pri čemu je B površina baze, a v visina valjka. Baza je krug kojem imamo zadan opseg. Opseg kruga polumjera r iznosi $O = 2r\pi$, pa je $r = 3cm$. Stoga je i $v = 3$, a površina baze je $r^2\pi cm^2$. Dakle, volumen valjka je $r^2\pi \cdot cm^3 v = 3^2\pi \cdot cm^3 3 = 27\pi cm^3$

Zadatak 20

Koliko je oplošje Rubikove kocke ako je volumen jedne kockice od kojih se ona sastoji $6,859cm^3$?.



Rješenje:

Volumen kocke duljine stranice a je a^3. Volumen male kockice iznosi $6,859$. Označimo duljinu stranice male kockice s a. Imamo $a^3 = 6.859 \Rightarrow a = 1.9$.
Sada je duljina stranice velike kocke jednaka $3 \cdot 1.9 = 5.7$. Oplošje kocke sastoji se od 6 kvadrata, pa je traženo oplošje $6 \cdot (5.7)^2 = 194.94cm^3$

Zadatak 21

Koliko je $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n}{2n+3}$

Rješenje:

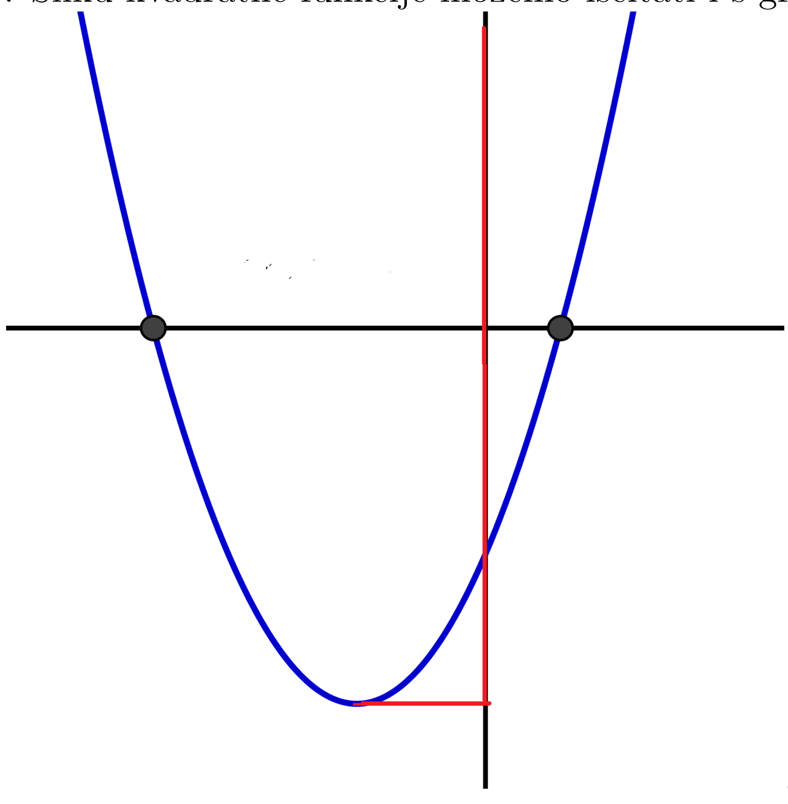
Promotrimo koeficijente koji stoje uz najveću potenciju, u ovom slučaju n. U brojniku je taj koeficijent 1, a u nazivniku 2, pa je $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+3} = \frac{1}{2}$.

Zadatak 22

Kolika je vrijednost realnog parametra k u zapisu funkcije $f(x) = x^2 - 2x + k$ kojoj je slika interval $[5, \infty >$?

Rješenje:

Slika funkcije su sve vrijednosti koje f(x) može postići. Navedena funkcija je kvadratna, koeficijent uz x^2 je pozitivan pa je graf parabola koja "se smije". Sliku kvadratne funkcije možemo isčitati i s grafa.



Dakle, sa slike vidimo da ova kvadratna funkcija poprima sve vrijednosti od druge koordinate tjemena do $+\infty$. Za koordinate tjemena imamo formulu, a druga koordinata tjemena je dana sa $\dfrac{4ac-b^2}{4a}$. U zadanoj kvadratnoj funkciji vrijedi $a=1, b=-2, c=k$. Nadalje, iz uvjeta zadatka slijedi da druga koordinata tjemena mora biti jednaka 5. Stoga imamo jednadžbu:

$$\frac{4ac-b^2}{4a}=5$$

$$\frac{4\cdot 1\cdot k-(-2)^2}{4\cdot 1}=5$$

$$4k-4=20 \Rightarrow k=6$$

Zadatak 23

Odredite sve intervale rasta funkcije $f(x)=\dfrac{3x-5}{x+2}$.

Rješenje:

Prvo odredimo domenu funkcije. Imamo uvjet da nazivnik ne smije biti 0, pa je $x+2\neq 0 \Rightarrow x\neq -2$. Dakle, domena funcije je $\mathbb{R}\setminus\ \{-2\}$. Funkcija je rastuća tamo gdje je derivacija funkcije pozitivna. Stoga derivirajmo zadanu funkciju. Prema pravilima za deriviranje imamo:

$$f'(x)=\frac{(3x-5)'\cdot(x+2)-(3x+5)\cdot(x+2)'}{(x+2)^2}=$$
$$=\frac{3(x+2)-(3x+5)1}{(x+2)^2}=\frac{1}{(x+2)^2}$$

Sada rješavamo nejednadžbu $\dfrac{1}{(x+2)^2}>0$. Medutim, budući da su i brojnik i nazivnik ovog izraza uvijek pozitivni brojevi za svaki x iz domene, vrijedi da je funkcija rastuća na cijeloj domeni, tj. interval rasta je $<-\infty,-2>\cup<2,+\infty>$

Zadatak 24

Koja od navedenih tvrdnja vrijedi za izraz $(n+1)(n+2)-n^2-2n-1$?

A) Vrijednost je izraza za svaki prirodni broj n paran broj.

B) Vrijednost je izraza za svaki prirodni broj n djeljiva s 3.

C) Vrijednost je izraza za neki prirodni broj n jednaka 0.

D) Vrijednost je izraza za neki prirodni broj n pozitivna.

Rješenje:

Sredimo traženi izraz. Imamo:

$$(n+1)(n-2) - n^2 - 2n - 1 =$$

$$= n^2 - 2n + n + 2 - n^2 - 2n - 1 = -3n - 3.$$

Sada lako vidimo da je jedina istinita tvrdnja da je ovaj izraz uvijek djeljiv s 3.

Zadatak 25

Odredite $|z|$ ako je $z = \frac{3}{5} - \frac{4}{5}i$.

Rješenje:

Vrijedi: $|z| = \sqrt{Re^2 + Im^2} = \sqrt{(\frac{3}{5})^2 + (\frac{4}{5})^2} = 1$.

Zadatak 26

Napišite broj $\sqrt{b^7 \cdot \sqrt{b}}$ u obliku potencije s bazom b.

Rješenje:

Koristimo pravila za računanje s potencijama. Vrijedi: $\sqrt{b^7 \cdot \sqrt{b}} = \sqrt{b^7 \cdot b^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{b^{7+\frac{1}{2}}} = \sqrt{b^{\frac{15}{2}}} = (b^{\frac{15}{2}})^{\frac{1}{2}} = b^{\frac{15}{4}}$.

Zadatak 27

Izračunajte: $\dfrac{(10^{55}+1)^2-(10^{55}-1)^2}{10^55}$.

Rješenje:

Uočimo da je u brojniku navedenog izraza razlika kvadrata $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$.
Stoga je:
$$\frac{(10^{55}+1)^2-(10^{55}-1)^2}{10^55}=\frac{(10^{55}+1-(10^{55}-1))\cdot(10^{55}+1+10^{55}-1)}{10^{55}}=$$
$$\frac{2\cdot 10^{55}\cdot 2}{10^{55}}=4$$

Zadatak 28

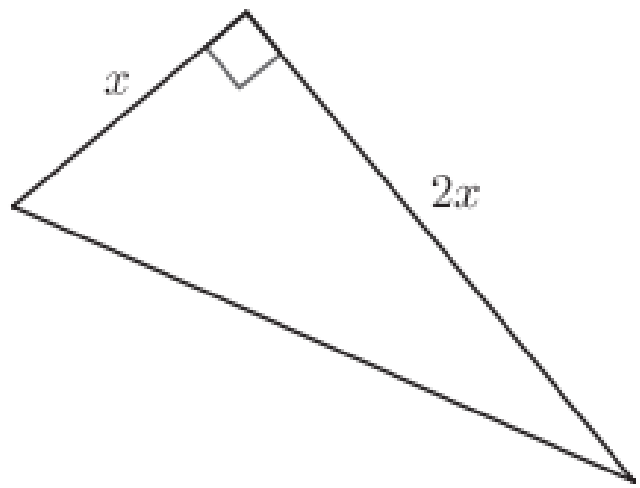
Odredite opći član aritmetičkoga niza 8,11,14,17,...

Rješenje:

Opći član aritmetičkog niza je dan formulom:
$a_n=a_1+(n-1)\cdot d$, pri čemu je a_1 prvi član u nizu, a d konstantna razlika dva susjedna člana.
Iz navedenog niza vidimo $a_1=8$ i $d=3$. Stoga je opći član aritmetičkog niza jednak:
$a_n=8+(n-1)\cdot 3=3n+5$.

Zadatak 29

Kolika je duljina treće stranice trokuta prikazanoga na skici?



Rješenje:

Označimo treću stranicu s a. Iz Pitagorinog poučka imamo:

$a^2 = x^2 + (2x)^2$

$a^2 = x^2 + 4x^2$

$a^2 = 5x^2$

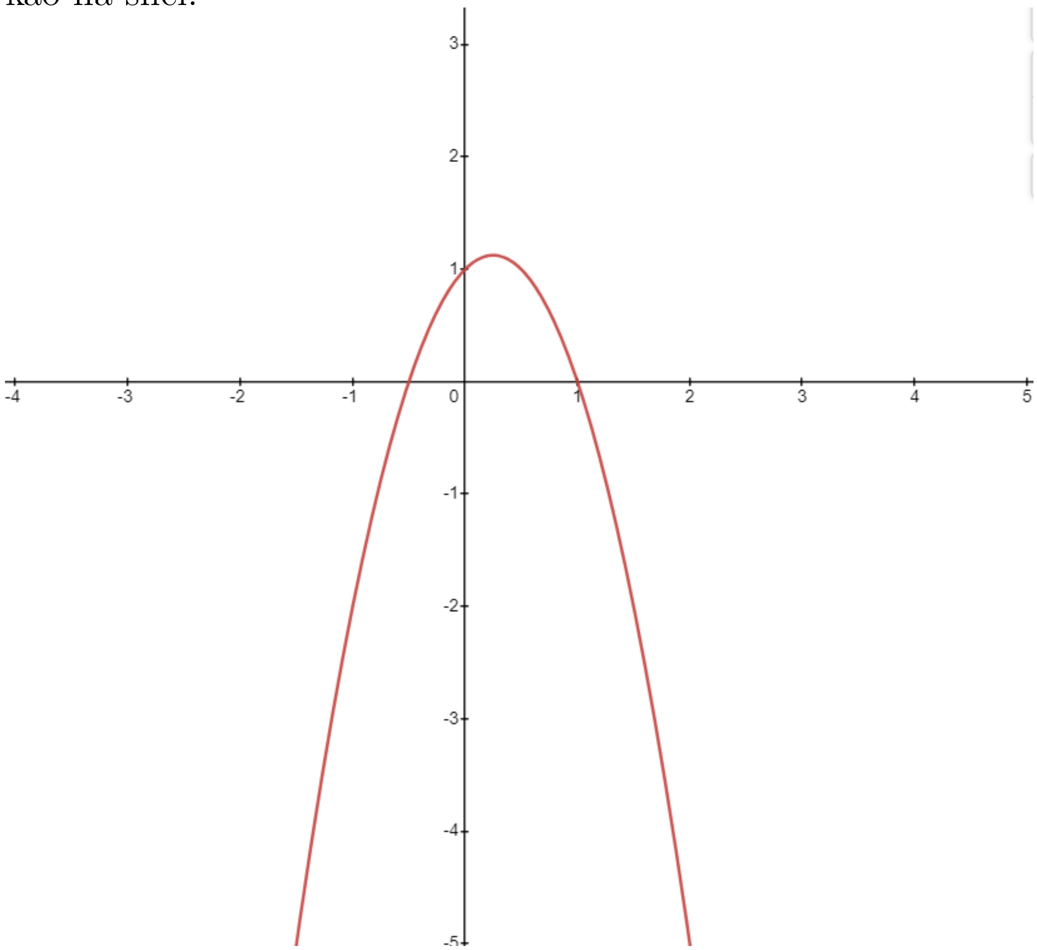
$a = x\sqrt{5}$

Zadatak 29.2

Riješite nejednadžbu $-2x^2 + x + 1 > 0$

Rješenje:

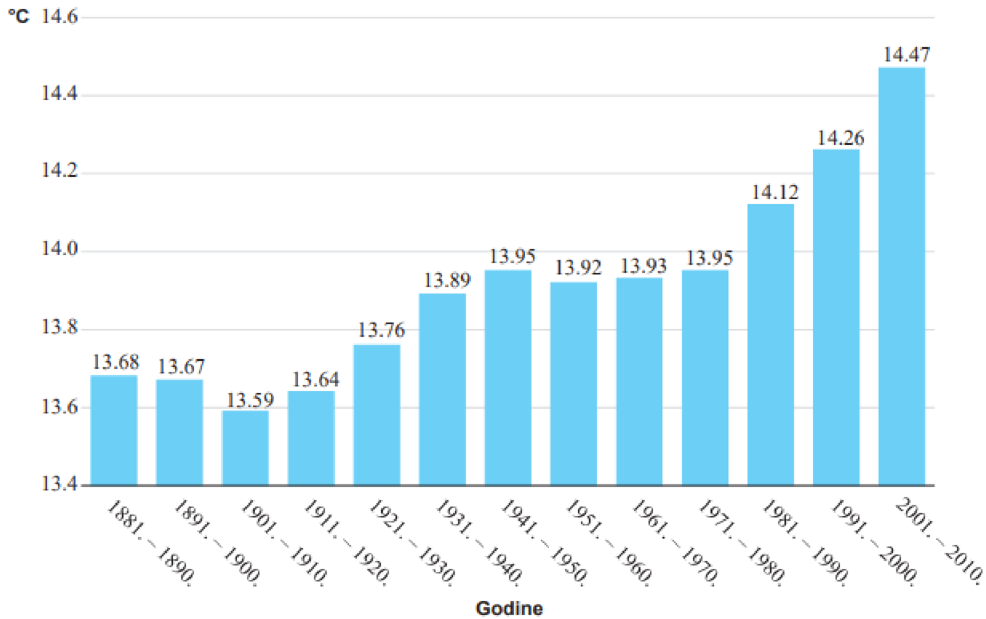
Nacrtajmo graf kvadratne funkcije $f(x) = -2x^2 + x + 1$. Budući da je koeficijent uz x^2 negativan, ta parabola "plače". Odredimo još nultočke te kvadratne funkcije, to jest rješenja jednadžbe $-2x^2+x+1=0$. Preko kalkulatora ili preko formule za rješenja kvadratne jednadžbe dobivamo rješenja $x_1 = 1$ i $x_2 = -0.5$. Dakle, graf te kvadratne funkcije izgleda kao na slici:



Sada lako vidimo da je ta funkcija strogo pozitivna u intervalu $< -0.5, 1 >$, pa je taj interval rješenje zadane nejednadžbe.

Zadatak 30

Stupčasti dijagram prikazuje površinsku temperaturu mora tijekom desetogodišnjih razdoblja od 1881. godine do 2010. godine



Zadatak 30.1

Kolika je razlika izmedu najviše i najniže temperature?

Rješenje:

Iz slike lako vidimo da je najviša zabilježena temperatura $14.47°$, a najniža $13.59°$. Njihova razlika je $0.88°$.

Zadatak 30.2

Kolika je bila prosječna temperatura za razdoblja u kojima su vrijednosti temperature bile više od $14°C$.

Rješenje:

Imamo tri zabilježene temperature više od $14°C$. To su 14.12, 14.26 i 14.47. Njihov prosjek je $\dfrac{14.12 + 14.26 + 14.47}{3} = 14.283$

Zadatak 31

Stara jedinica za mjerenje mase jest pud. Jedan pud odgovara masi od 40 funta, a jedna je funta 0.4095 kilograma. Koliko jedan kilogram ima puda?

Rješenje:

Imamo da je 1 funta 0.4095 kilograma. Stoga je 40 funta=16.38 kilograma. Dakle, 1 pud iznosi 16.38 kilograma, pa je 1 kilogram $\frac{1}{16.38} = 0.06105$ puda.

Zadatak 31.2

Litra cijedenoga voćnog soka u kojemu je omjer soka naranče i limuna $4:3$ košta 36 kuna. Litra soka naranče skuplja je za 5 kuna od litre soka limuna. Koliko košta litra soka limuna?

Rješenje:

Označimo cijenu litre soka od naranče nepoznanicom x i cijenu litre soka od limuna y. Litra soka od naranče skuplja je za 5 kuna od litre soka od limuna, pa imamo prvu jednadžbu: $x = y+5$. Nadalje, budući da je omjer soka narance i limuna u jednoj litri cijedenog soka 4:3, vrijedi da je u litri cijedenog soka $\frac{4}{7}$ naranče i $\frac{3}{7}$ limuna. Ukupna cijena litre cijedenog soka je 36 kn, pa imamo drugu jednadžbu: $\frac{4}{7}x+\frac{3}{7}y = 36$. Sada rješavamo sustav dvije jednadžbe s dvije nepoznanice. Iz prve jednadžbe imamo explicitno izražen $x = y + 5$, pa ga ubacimo u drugu jednadžbu. Imamo:

$$\frac{4}{7}(y+5) + \frac{3}{7}y = 36$$

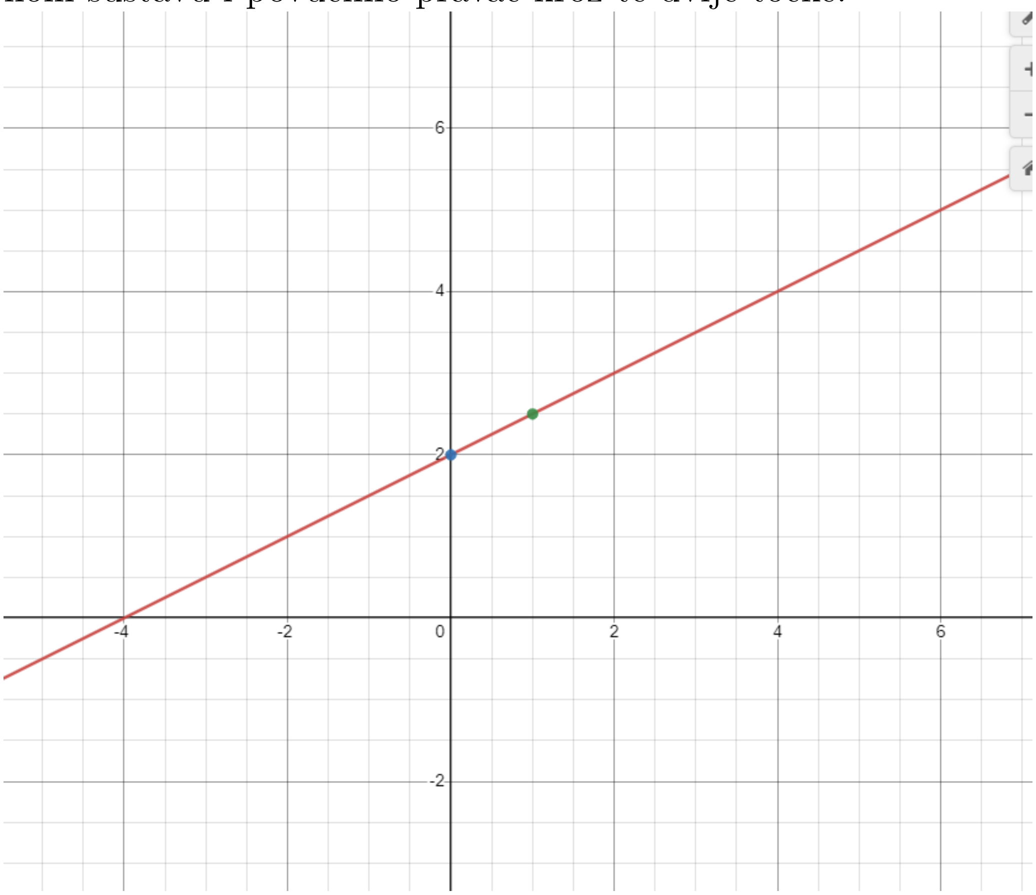
$$4(y+5) + 3y = 252 \Rightarrow y = 33.14$$

Zadatak 32.1

Nacrtajte pravac zadan jednadžbom $x - 2y + 4 = 0$

Rješenje:

Pravac je jedinstveno odreden dvjema točkama koje leže na njemu. Stoga odredimo dvije točke pravca. Stavimo $x = 0$ i imamo $x-2y+4 = 0 \Rightarrow 0 - 2y + 4 = 0 \Rightarrow y = 2$. Dakle, prva točka je (0,2). Analogno, uvrstimo $x = 1$ i dobivamo $y = 2.5$. Označimo te točke u koordinatnom sustavu i povucimo pravac kroz te dvije točke.



Zadatak 32.2

Točka (5,9) leži na pravcu koji je usporedan s x osi. Kako glasi jednadžba toga pravca?

Rješenje:

Ako je pravac usporedan s x-osi onda sve točke pravca paralelnog s njim imaju jednake druge koordinate. Budući da pravac prolazi točkom (5,9) trežana jednadžba je $y = 9$.

Zadatak 33.1

Kako glasi jednadžba kružnice koja prolazi točkom A(-2,4) i koncentrična je kružnici $x^2 + y^2 - 12x + 2y + 23 = 0$?

Rješenje:

Koncentrične kružnice imaju isto središte. Da bi odredili središte zadane kružnice jednadžbu moramo svesti na oblik $(x - x_1)^2 + (y - y^1)^2 = r^2$. Imamo:

$$x^2 + y^2 - 12x + 2y + 23 = 0$$

$$x^2 - 12x + y^2 + 2y + 23 = 0$$

$$x^2 - 12x + 36 - 36 + y^2 + 2y + 1 - 1 + 23 = 0$$

$$(x - 6)^2 - 36 + (y + 1)^2 - 1 + 23 = 0$$

$$(x - 6)^2 + (y + 1)^2 = 14$$

Dakle, središte zadane kružnice je točka (6,-1). Stoga će i kružnica koncentrična zadanoj imati isto središte i da bi napisali njenu jednadžbu moramo odrediti radijus. Uvjet zadatka je da nova kružnica mora prolaziti točkom (-2,4). Stoga će radijus biti jednak udaljenosti središta kružnice do točke (-2,4). Koristimo formulu za udaljenost točaka u ravnini:

$$r = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

$$r = \sqrt{(6 - (-2))^2 + (-1 - 4)^2} = \sqrt{89}$$

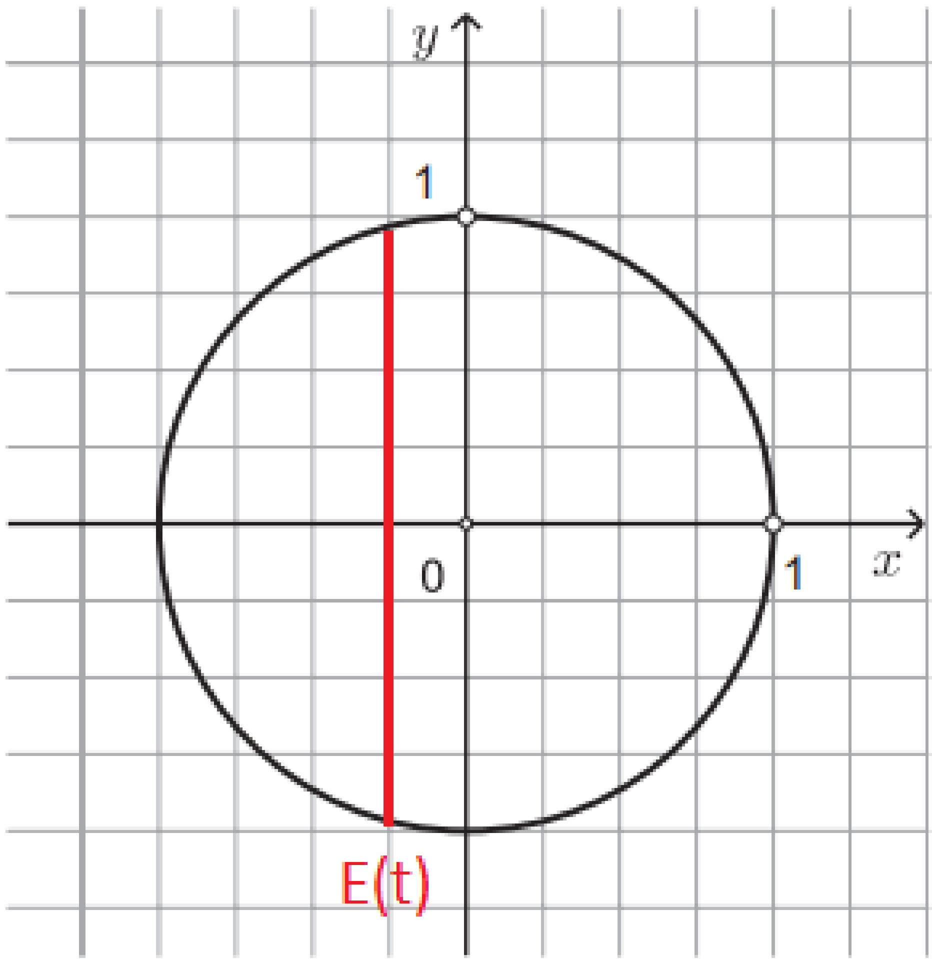
Konačno, jednadžba tražene kružnice je

$$(x - 6)^2 + (y + 1)^2 = 89$$

Zadatak 33.2

Na brojevnoj kružnici prikažite točku E(t) za koju vrijedi $cost = -\frac{1}{4}$, $sint < 0$

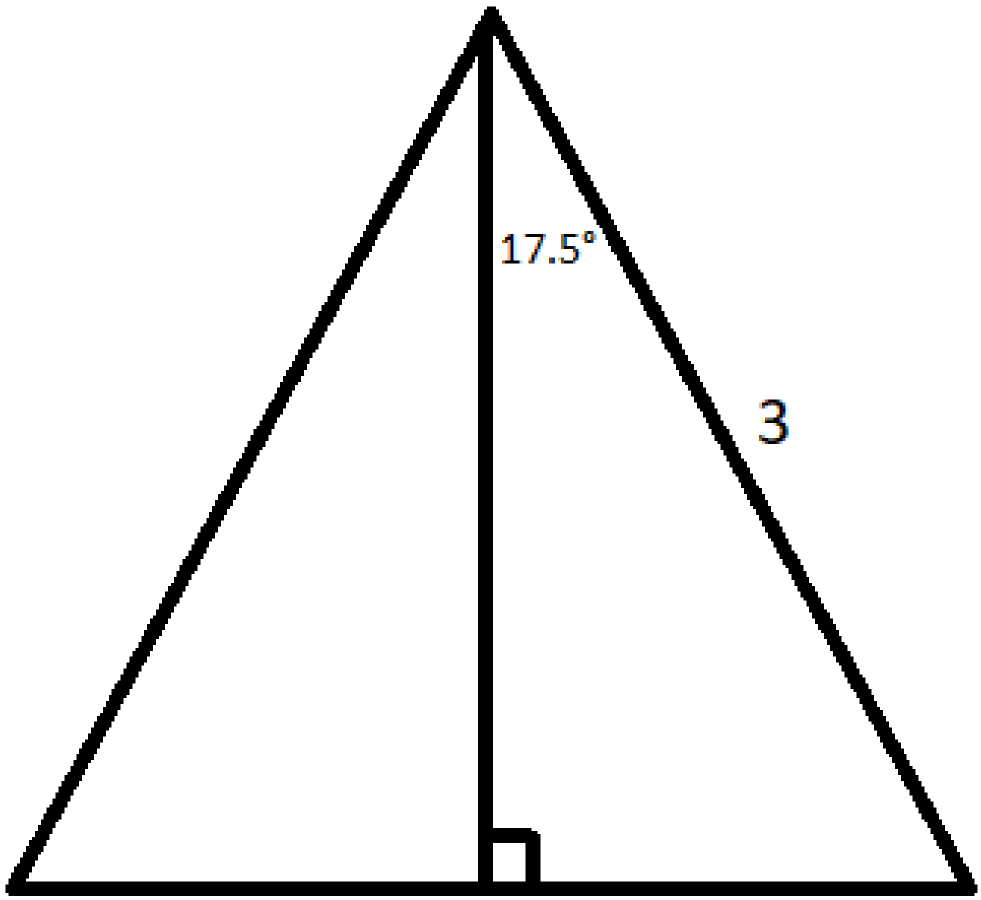
Rješenje:



Zadatak 34.1

Duljina je jednoga kraka dvokrakih ljestava $3m$. Koju visinu dosežu te ljestve kada krakovi zatvaraju kut mjere $35°$?

Rješenje:



Zadatak modeliramo tako što promatramo jednakokračan trokut duljine stranice 3 i kutom nasuprot osnovice 35°. Povučemo li visinu jednakokračnom trokutu iz vrha nasuprot osnovice dobivamo pravokutni trokut pri čemu je jedan kut upola manji od 35°. Koristeći trigonometriju pravokutnog trokuta lako izračunamo traženu visinu. Imamo:

$$cos 17.5° = \frac{v}{3} \Rightarrow v = 2.86m$$

Zadatak 34.2

Kolika je najkraća stranica trokuta kojemu su mjere unutarnjih kutova u omjeru 2 : 5 : 8, a opseg 48 cm?

Rješenje:

Neka su a,b i c duljine stranica i α, β, γ prikladni kutovi. Za početak izračunajmo mjeru svakog kuta. Iz zadanog omjera imamo $\alpha = 2k$, $\beta = 5k$ i $\gamma = 8k$. Zbroj kutova u trokutu jednak je 180° pa imamo:$2k + 5k + 8k = 180° \Rightarrow k = 12$. Stoga je $\alpha = 24°$, $\beta = 60°$ i $\gamma = 96°$. Opseg trokuta je 48cm, pa je $a + b + c = 48 \Rightarrow c = 48 - a - b$. Prema poučku o sinusu, vrijedi:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} \Rightarrow \frac{a}{\sin 24°} = \frac{b}{\sin 60°}.$$

Takoder, vrijedi i

$$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} \Rightarrow \frac{b}{\sin 60°} = \frac{48 - a - b}{\sin 96°}$$

Dobili smo sustav od dvije jednadžbe s dvije nepoznanice. Iz prve jednadžbe slijedi $a = \dfrac{b}{\sin 60°} \cdot \sin 24° = 0.46966b$. Uvrstimo a u drugu jednadžbu i dobivamo:

$$\frac{b}{\sin 60°} = \frac{48 - 0.46966b - b}{\sin 96°}$$

$$\sin 96° \cdot 0.47b = \sin 23° \cdot (48 - 1.46966b)$$

$$0.9945b = 41.56922 - 1.2727b$$

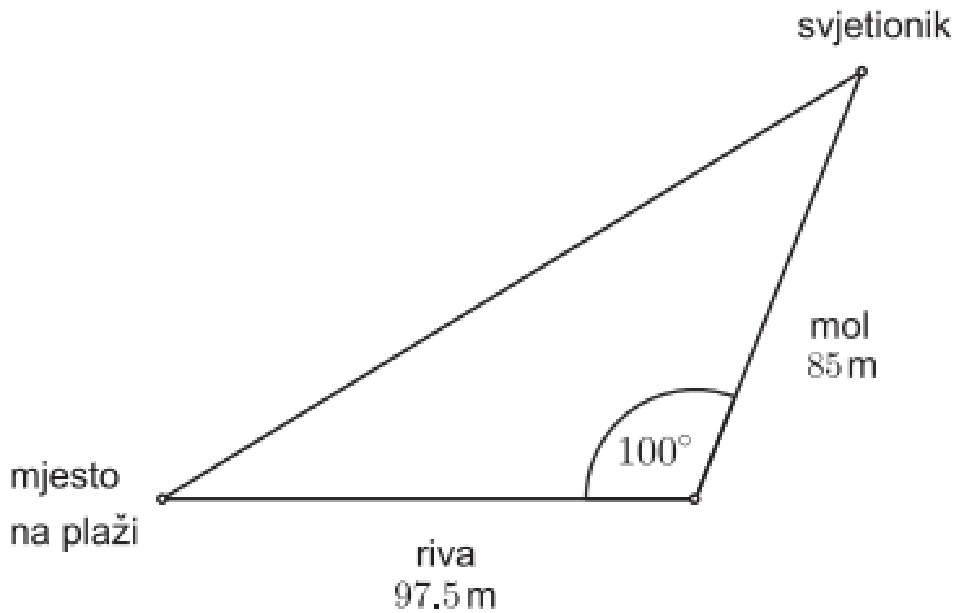
$$2.267266b = 18.345 \Rightarrow b = 18.3345$$

Budući da nasuprot najmanjeg kuta leži najmanja stranica, sliejdi da je a najkraća stranica i imamo

$$a = 0.46966b = 0.47 \cdot 18.3345 = 8.61$$

Zadatak 35.1

Maja pliva od mjesta na plaži do svjetionika, a Iva od toga istog mjesta na plaži do svjetionika hoda rivom i molom. Koliko je Majin put kraći od Ivina prema podatcima sa skice?



Rješenje:

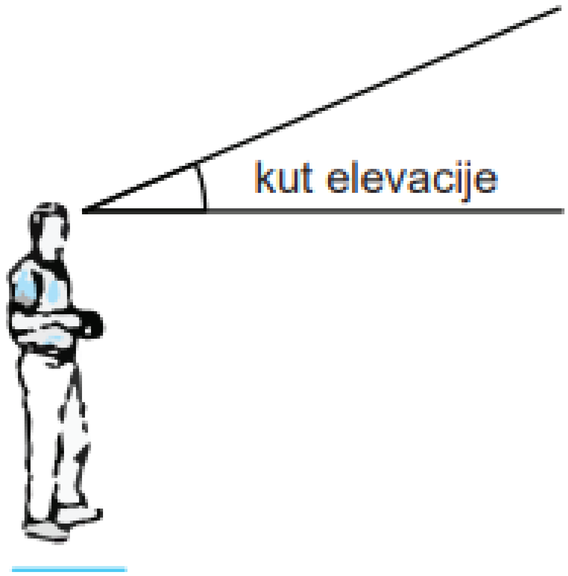
Ivin put jednak je $97.5m + 85m = 182.5m$. Majin put možemo dobiti koristeći poučak o kosinusu. Vrijedi:

$$a^2 = 97.5^2 + 85^2 - 2 \cdot 97.5 \cdot 85 \cdot \cos 100^\circ$$
$$a^2 = 19609.4685 \Rightarrow a = 140.033$$

Dakle, Majin put kraći je za $182.5 - 140.033 = 42.47$ metara.

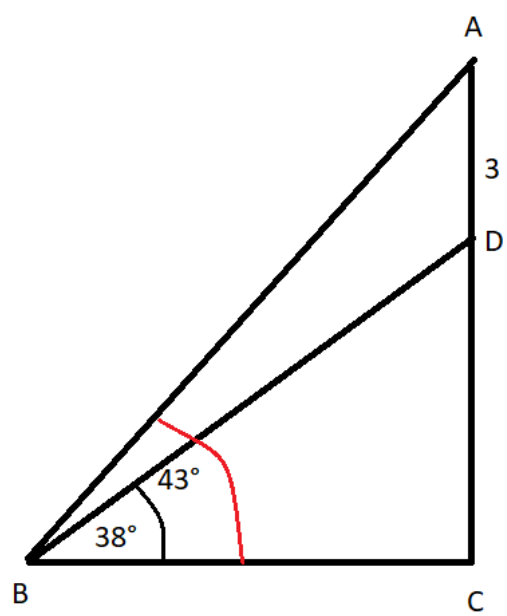
Zadatak 35.2

Na vrhu je zgrade antena visine 3 m. Oči su promatrača na visini 1.6 m od tla. Promatrač je udaljen od zgrade i vidi vrh zgrade pod kutom elevacije mjere 38°, a vrh antene pod kutom elevacije mjere 43°. Kolika je visina zgrade?



Rješenje:

Modelirajmo situaciju sljedećom skicom:



Zanima nas duljina stranice AD. Vidimo da je kut $\angle DBA = 43^\circ -$

$38° = 5°$. Nadalje, u trokutu $\triangle ABC$ vrijedi da je $\angle CDB = 180° - (38° + 90°) = 52°$. Stoga je i kut $\angle BDA = 180° - 52° = 128°$, pa je kut $\angle DAB = 180° - (128° + 5°) = 47°$. Iskoristimo sada poučak o sinusu da dobijemo duljinu stranice BD. Vrijedi:

$$\frac{|BD|}{\sin 47°} = \frac{|AD|}{\sin 5°} \Rightarrow |BD| = \frac{3}{\sin 5°} \cdot \sin 47° = 25.174$$

Sada koristimo trigonometriju pravokutnog trokuta da izračunamo duljinu stranice CD. Vrijedi:

$$\sin 38° = \frac{|CD|}{25.147} \Rightarrow |CD| = 25.147 \cdot \sin 38° = 15.498679$$

Duljina stranice CD predstavlja visinu zgrade umanjenu za 1.6, pa je tražena visina zgrade $15.498679 + 1.6 = 17.09868$ metara.

Zadatak 36.1

Funkcija $P(t) = 145 \cdot 2.72^{-0.092t}$ opisuje puls trkača t minuta nakon utrke, $0 \leq t \leq 15$ Koliki je puls trkača 3 minute nakon utrke?

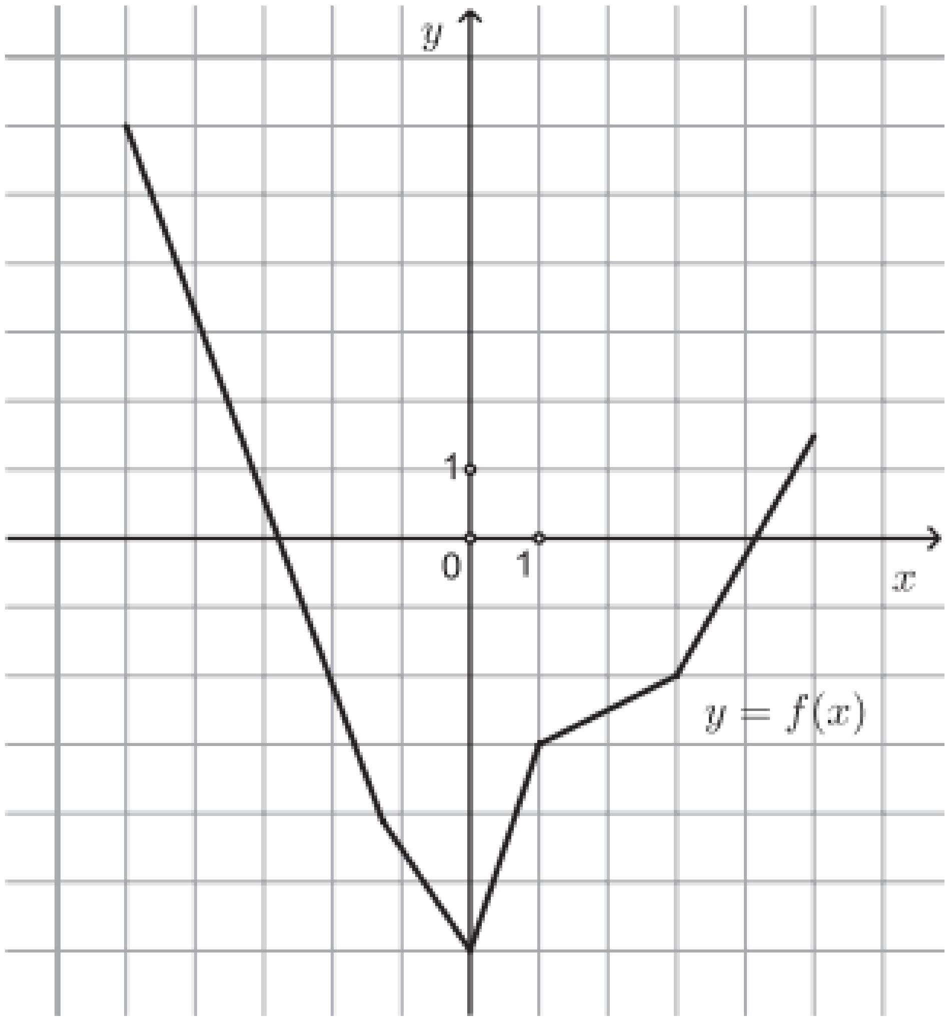
Rješenje:

U ovoj funkciji $P(t)$ predstavlja puls trkača, a t vrijeme nakon utrke. Da bi izračunali puls nakon 3 minute u zadanu funkciju uvrstimo $t = 3$. Imamo:

$$P(3) = 145 \cdot 2.72^{-0.092 \cdot 3} \approx 110$$

Zadatak 36.2

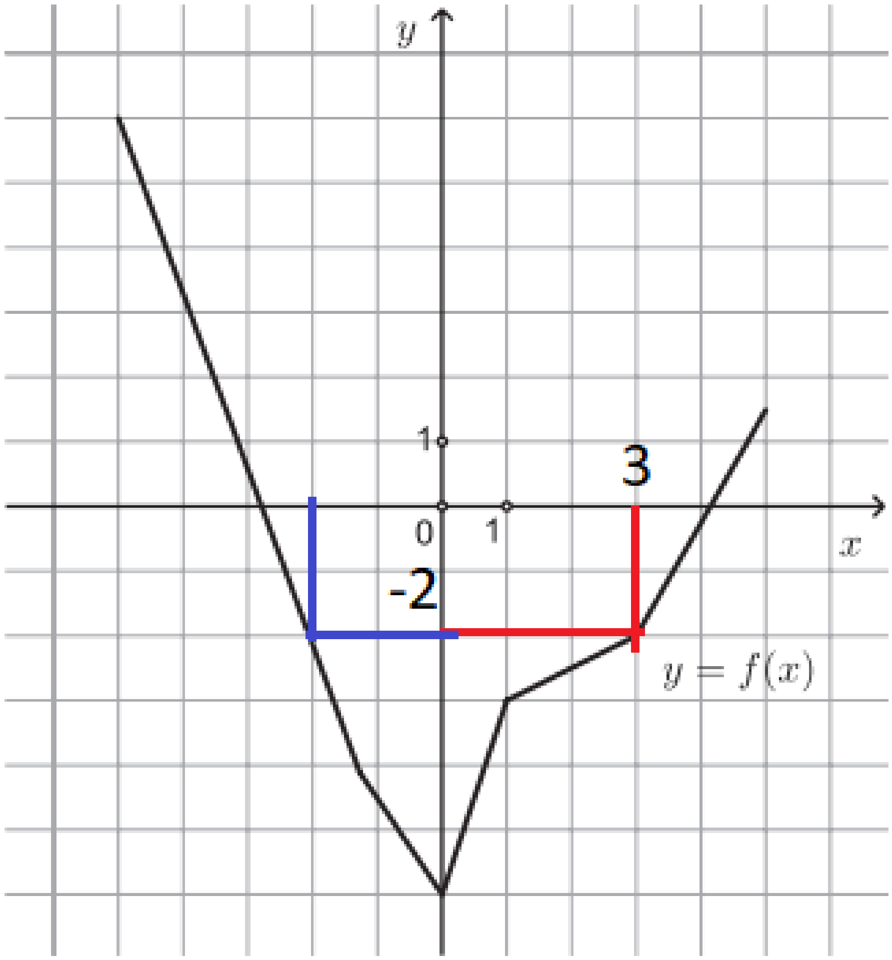
Na slici je prikazan graf funkcije f definirane na [-5,5].



Kolika je vrijednost parameta $a, a \neq 2$ za koji vrijedi $f(a) = f(3)$?

Rješenje:

Na grafu funkcije lako vidimo da je $f(3) = -2$. Sada slično, tražimo točke a iz domene za koje je $f(a) = 3$. Lako vidimo da je jedina takva točka a=-2.



Zadatak 37.1

Odredite derivaciju funkcije $f(x) = 11(x^3 - \sqrt{5})$.

Rješenje:

Sredivanjem izraza imamo $f(x) = 11x^3 - 11\sqrt{5}$. Sada koristimo pravila deriviranja i imamo:
$f(x) = (11x^3)' - (11\sqrt{5})' = 33x^2 - 0 = 33x^2$.

Zadatak 37.2

Kako glasi jednadžba tangente na krivulju $y = \dfrac{4}{y}$ u točki $S(2, y)$ te krivulje?

Rješenje:

Jednadžba tangente u točki (x_0, y_0) glasi:

$$y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Zadana je točka $x_0 = 2$ pa je $y_0 = f(x_0) = \frac{4}{2} = 2$. Potrebno je još odrediti derivaciju funkcije $f(x) = \frac{4}{y}$ u točki $x_0 = 2$. Vrijedi $f'(x) = \frac{-4}{x^2}$, pa je $f'(x_0) = \frac{-4}{2^2} = -1$.
Sada, uvrštavanjem svih podataka u jednadžbu tangente imamo: $y - 2 = (-1) \cdot (x - 2) \Rightarrow y = -x + 4$ je tražena jednadžba tangente.

Zadatak 38.1

Brojevi $x + 2$, 14, $6x - 2$ uzastopni su članovi rastućega geometrijskog niza. Koliko iznosi idući član toga niza?

Rješenje:

Svojstvo geometrijskog niza jest da je kvocijent svaka dva susjedna člana konstantan. Stoga je

$$\frac{14}{x+2} = \frac{6x-2}{14}$$

$$(x + 2) \cdot (6x - 2) = 14 \cdot 14$$

$$6x^2 + 10x - 4 = 196$$

$$6x^2 + 10x - 200 = 0$$

Rješavanjem te kvadratne jednadžbe imamo dva rješenja: $x_1 = 5$ i $x_2 = -\frac{40}{6}$. Stoga su mogući zadani članovi niza

$5 + 2$, 14, $6 \cdot 5 - 2$, odnosno $7, 14, 28$ za $x_1 = 5$ ili

$-\frac{40}{6}+2$, 14 ,$6\cdot(-\frac{40}{6})-2$, odnosno $-\frac{28}{6}$, 14 ,-42.
Budući da je samo prvi niz rastući, drugo rješenje možemo zanemariti. Dakle, traženi niz je $7, 14, 28, \ldots$. Lako vidimo da je u ovom nizu koeficijent $q = 2$, pa je sljedeći član niza jednak $28 \cdot 2 = 56$.

Zadatak 38.2

Odredite sva rješenja jednadžbe $2cos(3x - \frac{\pi}{6} + 1 = 0$

Rješenje:

Imamo: $2cos(3x - \frac{\pi}{6}) = -1$

$cos(3x - \frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{2}$.,

$3x - \frac{\pi}{6} = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Dakle,
$3x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ili

$3x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Djeljenjem obe jednadžbe s 3 imamo da su rješenja:

$$x = \frac{5\pi}{18} + \frac{2}{3}k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = -\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Zadatak 39.1

Neka su b i c cijeli brojevi za koje vrijedi da je $(x - 10)(x - 6) + 3 = (x + b)(x - c)$, za svaki realni broj x. Koliki je zbroj svih mogućih vrijednosti broja c?

Kada izmnožimo izraze s lijeve i desne strane dobivamo:
$x^2 - 16x + 60 = x^2 + (b - c)x - bc$

$-16x + 60 = (b - c)x - bc.$
Da bi ovi izrazi bili jednaki, koeficijenti uz x i slobodni članovi moraju biti jednaki. Stoga je

$$b - c = -16$$

$$bc = 60$$

Iz druge jednadžbe imamo: $b = \frac{60}{c}$, pa uvrštavanjem u prvu jednadžbu dobivamo: $\frac{60}{c} - c = -16 \cdot c$

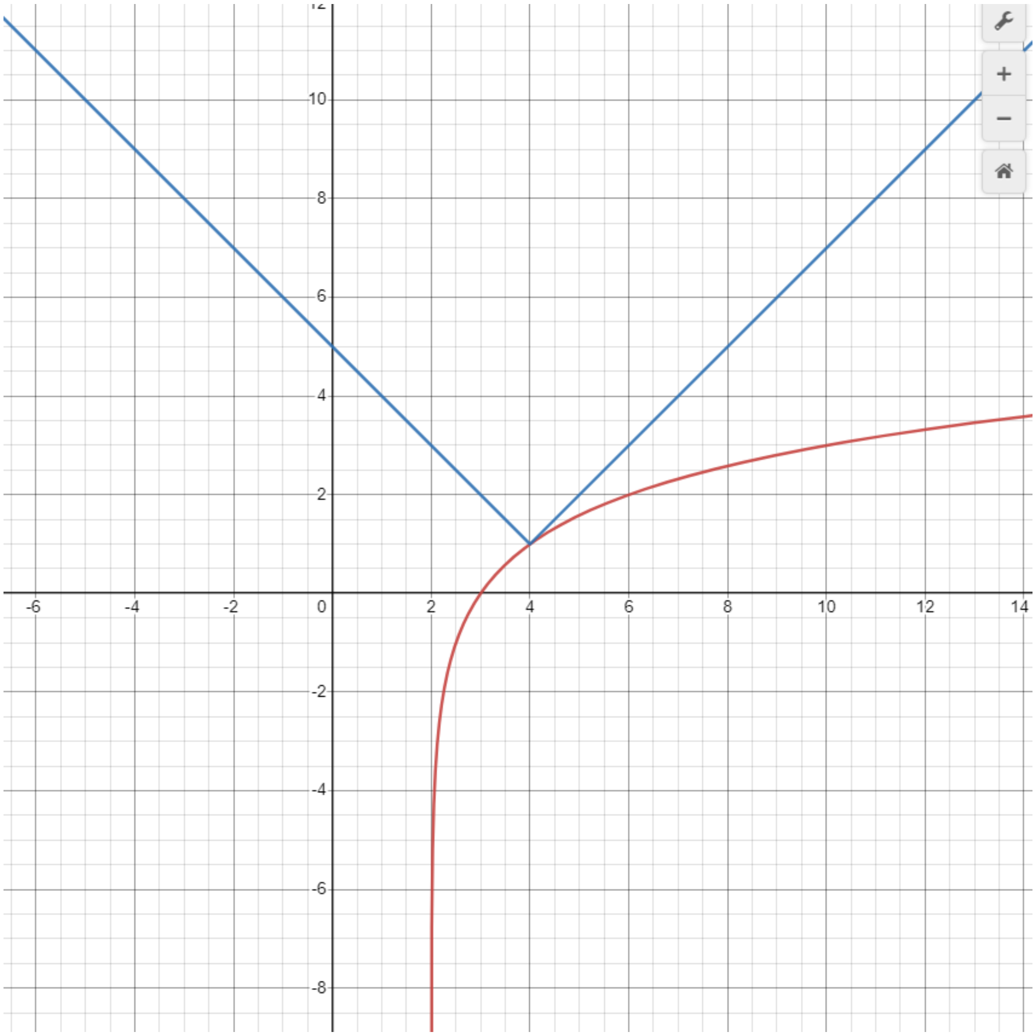
$60 - c^2 = -16c \Rightarrow c^2 - 16c + 60 = 0.$
Rješenja ove kvadratne jednadžbe su $c_1 = 10$ i $c_2 = 6$, pa je njihov zbroj jednak 16.

Zadatak 39.2

Koliko rješenja ima jednadžba$log_2(x - 2) = |x - 4| + 1$? Pri rješavanju zadatka možete se koristiti koordinatnim sustavom.

Rješenje:

Nacrtajmo grafove funkcija $f(x) = log_2(x - 2)$ i $g(x) = |x - 4| + 1$.
Prva funkcija je logaritamska funkcija, pomaknuta desno za 2 (jer logaritam djeluje na x-2).
Druga funkcija je funkcija apsolutne vrijednosti, pomaknuta desno za 4 i podignuta za 1. Stoga grafovi funkcija izgledaju kao na slici:



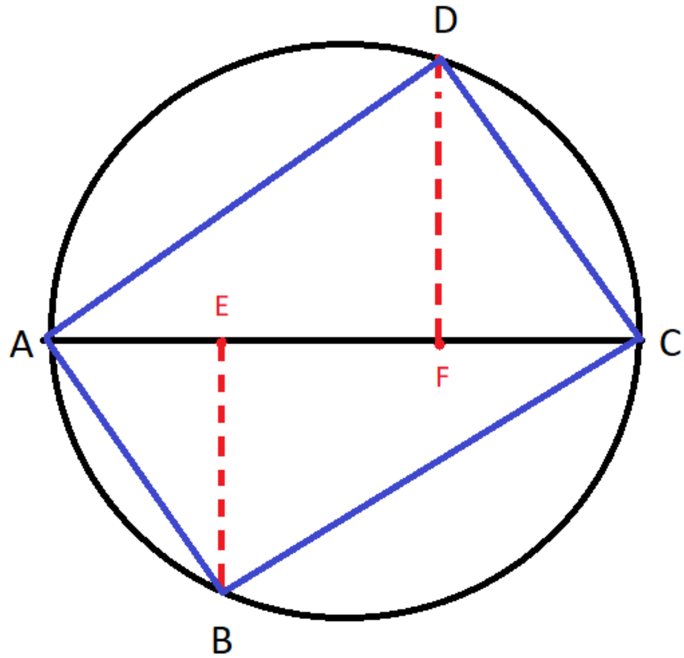
Vidimo da se zadani grafovi sijeku u jednoj točki (4,1). Stoga zadana jednadžba ima jedno rješenje, $x = 4$.

Zadatak 40

Iz debla u obliku valjka dobije se greda u obliku uspravne prizme tako da se promjer $\overline{AC}$ kružnog presjeka debla točkama E i F podijeli na tri jednaka dijela. Okomice na promjer $\overline{AC}$ u djeljišnjim točkama E i F sijeku kružnicu u točkama B i D. Presjek tražene grede jest četverokut ABCD. Koliki je postotak otpada pri proizvodnji debla iz grede?

Rješenje:

Označimo visinu sa v visinu valjka i r polumjer kružnice u bazi. Tada je volumen valjka $V_v = r^2 \cdot \pi \cdot v$. Izračunajmo sada volumen dobivenog kvadra. Kvadar ima istu visinu kao i valjak i promotrimo njegovu bazu:



Budući da su kutovi $\angle ABC$ i CDA kutovi nad promjerom vrijedi da su ti kutovi jednaki $90°$. Stoga je površina baze kvadra jednaka površini četverokuta ABCD. Budući da su trokuti $\triangle ABc$ i $\triangle ACD$ sukladni, dovoljno je izračunati površinu trokuta $\triangle ABC$ i želimo tu površinu izraziti preko r.

Vrijedi da je $|AE| = \frac{1}{3}2r$ $|EC| = \frac{2}{3}2r$. Prema Euklidovom poučku visina $|EB|$ pravokutnog trokuta $\triangle ABC$ jednaka je $\sqrt{|AE| \cdot |EC|} = \sqrt{\frac{1}{3}2r \cdot \frac{2}{3}2r} = \frac{2r}{3}\sqrt{2}$. Stoga je površina trokuta ABC jednaka $\frac{1}{2}|AC| \cdot |EB| = \frac{1}{2} \cdot 2r \cdot \frac{2r}{3}\sqrt{2} = \frac{2r^2}{3}\sqrt{2}$.

Slijedi da je površina četverokuta ABCD jednaka $\frac{4r^2}{3}\sqrt{2}$.
Stoga, postotak volumena koji kvadar zauzima unutar valjka je

$$\frac{\frac{4r^2}{3}\sqrt{2} \cdot v}{r^2\pi \cdot v} = \frac{\frac{4}{3} \cdot \sqrt{2}}{\pi} \approx 0.6$$

Dakle, postotak otpada je $100\% - 60\% = 40\%$